THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

PARIS VI

par

Michel JAFFRIN

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

ETUDE DU TRANSPORT PERISTALTIQUE ET DE QUELQUES APPLICATIONS PHYSIOLOGIQUES

Soutenue le 12 FEVRIER 1976 devant le jury composé de :

Monsieur le Professeur Henri CABANNES Président

Monsieur le Professeur Raymond COMOLET

Monsieur Guy DENIELOU

Monsieur le Professeur Marcel LEGRAIN

Monsieur le Professeur Daniel QUEMADA

Monsieur le Professeur Henri CABANNES, Président

Monsieur le Professeur Raymond COMOLET

Monsieur Guy DENIEL-DU

Monsieur le Professeur Marcel LEGRAIN

Monsieur le Professeur Daniel QUEMADA

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES-SCIENCES PHYSIQUES

présentée

A L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

PARIS VI

par

Michel JAFFRIN

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

ETUDE DU TRANSPORT PERISTALTIQUE ET DE QUELQUES APPLICATIONS PHYSIOLOGIQUES

Soutenue le 12 FEVRIER 1976 devant le jury composé de :

Monsieur le Professeur Henri CABANNES Président

Monsieur le Professeur Raymond COMOLET

Monsieur Guy DENIELOU

Monsieur le Professeur Marcel LEGRAIN

Monsieur le Professeur Daniel QUEMADA

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

J'ai eu la chance de bénéficier dans la poursuite de ce travail des encouragements et de l'aide de plusieurs personnes.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à mon ancien collègue, Ascher SHAPIRO "Institute Professor" au Massachussetts Institute of Technology, qui m'a initié à ce sujet fascinant que constitue le transport péristaltique et avec qui j'ai eu le privilège d'une étroite et fructueuse association pendant plusieurs années. Je dois également beaucoup à mon ami, ancien professeur et ancien collègue, Ronald PROBSTEIN, Professeur au Massachussetts Institute of Technology, qui a guidé mes premiers pas dans la recherche il y a bientôt quinze ans. Je ne voudrais pas oublier non plus nos anciens étudiants, MM. WEINBERG et ECKSTEIN, qui ont assumé la vérification expérimentale de ce travail.

De ce côté de l'atlantique je désire témoigner ma gratitude à Monsieur le Professeur Henri CABANNES pour ses encouragements en vue de la soutenance de cette thèse. Je tiens également à exprimer mes remerciements à MM. les Professeurs Raymond COMOLET et Daniel QUEMADA qui ont bien voulu s'intéresser à mes travaux. Je veux remercier tout spécialement Monsieur le Professeur LEGRAIN, Directeur du Service de Nephrologie à l'Hôpital Pitié Salpétrière qui a bien voulu être rapporteur des aspects physiologiques de cette thèse. Enfin je suis également très reconnaissant à Monsieur Guy DENIELOU, président de l'Université de Technologie de Compiègne où j'ai le privilège d'enseigner, d'avoir bien voulu faire partie de mon jury.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548120_0018

TABLE DES MATIERES

page

INTRODUCTION 1

Illustration élémentaire du mécanisme de transport péristaltique 2

Plan des travaux 3

I - FORMULATION DES EQUATIONS DU TRANSPORT PERISTALTIQUE

1. 1 PARAMETRES 5

1. 2 MISE EN EQUATION DU PROBLEME 7

1. 3 CONDITIONS AUX LIMITES 9

1. 4 TRAVAUX PRECEDENTS 10

II - POMPAGE PERISTALTIQUE DANS LA LIMITE DES NOMBRES DE REYNOLDS NULS ET DES LONGUEURS D'ONDES INFINIES

2. 1 SOLUTION EN DEVELOPPEMENT EN SERIE 14

2. 2 SOLUTION POUR $R_e = \alpha = o$ 16

Caractéristique pression-débit de l'écoulement 18

Rendement du pompage 22

Etude des trajectoires des particules fluides 23

Critère de reflux à la paroi 26

Solution pour des ondes de petite amplitude 27

Piègeage des particules fluides par l'onde 29

Résumé graphique 30

2. 3 TRANSPORT PERISTALTIQUE DANS UN CONDUIT DE REVOLUTION 31

Rendement mécanique 34
Profils de vitesse et détails des trajectoires 35
Critère de reflux à la paroi 36
Critère de piégeage 36
Résumé graphique 37

2. 4 *SUPERPOSITION D'ONDES TRANSVERSALES ET LONGITUDINALES* 37

III - *EFFETS D'INERTIE ET DES LONGUEURS D'ONDE FINIES SUR LE POMPAGE PERISTALTIQUE*

3. 1 *CONTRIBUTION DES EFFETS DE COURBURE DE LA PAROI POUR* $R_e = 0$ 41

3. 2 *CONTRIBUTION DES EFFETS D'INERTIE* 45

3. 3 *ETUDE DETAILLEE DES TRAJECTOIRES DES PARTICULES FLUIDES* 50

Distribution des vitesses 50
Vitesse sur l'axe 51
Critère de reflux 51
Critère de piégeage 53
Résumé graphique 54
Conclusion 54

IV - *TRANSPORT PERISTALTIQUE DANS L'URETERE*

4. 1 *INTRODUCTION* 55

Données physiologiques sur l'uretère 56

4. 2 *MODELE D'ONDES PERISTALTIQUES DANS L'URETERE* 58

4. 3 *MODELE MATHEMATIQUE* 60
Section intérieure circulaire 63
Section intérieure à forme étoilée 66

4. 4 *REFLUX* 68

Cas circulaire 68
Cas de canaux bidimensionnels 70

4. 5 *POCHES DE RECIRCULATION PIEGEES* 71

V - ETUDE DE L'ECOULEMENT DANS UNE POMPE PERISTALTIQUE

5. 1 INTRODUCTION 73

5. 2 ETUDE DE L'ECOULEMENT 75

Représentation de la section intérieure du tube 75

Distribution de vitesse, contraintes et pression à l'intérieur du fluide 77

Domaine de validité de la théorie 82

5. 3 RESULTATS

Cas des pompes classiques avec galets circulaires 83

5. 4 FORME D'ONDE CONDUISANT AUX CONTRAINTES MINIMA 85

5. 5 CONCLUSION 86

INTRODUCTION

Les ondes péristaltiques sont des ondes progressives de contraction et de dilatation qui se propagent le long des parois d'un conduit flexible. Lorsque ce conduit contient un fluide visqueux, l'action de ces ondes péristaltiques produit un transport du fluide dans la direction de propagation des ondes.

Ce mode de transport péristaltique ou peristalsis est bien connu des physiologistes, car il se rencontre fréquemment dans les organes dotés d'une structure de muscles tubulaires lisses. La nature met à profit l'action des ondes péristaltiques pour transporter l'urine dans les uretères entre les reins et la vessie, le bol alimentaire dans l'intestin etc ... Le transport de l'urine s'effectue en effet non pas par gravité mais par une succession d'ondes solitaires de contraction poussant devant elles un bolus dilaté. Ces ondes s'accompagnent d'une élévation locale de la pression qui permet à l'urine de se deverser dans la vessie même si la pression de celle-ci est supérieure à la pression moyenne dans l'uretère. Dans l'intestin, la situation est plus complexe car les ondes peristaltiques sont combinées avec des ondes de segmentation non progressives qui ont pour fonction de brasser le bol alimentaire en même temps que de le transporter.

On peut également rapprocher de la péristalsis l'action produite par les cils qui tapissent certains conduits des organes de reproduction et des voies respiratoires. Ces cils battent avec une certaine coordination et on peut assimiler la surface décrite par les extrémités de ces cils à une onde progressive, l'onde métachronale. Il existe toutefois une différence importante avec le cas de la péristalsis dans les parois d'un conduit en ce qui concerne les conditions aux limites sur la vitesse à la paroi. Dans le cas du conduit, la vitesse longitudinale à la paroi est nulle tandis qu'elle est égale à la vitesse de l'extrémité des cils dans l'autre cas.

Un autre type d'application du transport péristaltique se rencontre dans les pompes à galets qui sont utilisées en chirurgie pour le pompage du sang et dans l'industrie pour le pompage de matières alimentaires ou de fluides corrosifs. Ce type de pompe consiste en un tube flexible comprimé sur une partie de sa longueur par un galet tournant (par exemple, pompe Sarns) ou par une série de doigts mécaniques actionnés de manière séquentielle (pompe sigmamotor). Il

présente donc l'avantage que le fluide transporté, qui peut être un gaz ou un liquide, est complétement isolé du mécanisme de la pompe. Il n'est donc pas pollué par ce mécanisme. Inversement celui-ci est à l'abri d'actions corrosives éventuelles. Généralement le mécanisme de compression (galet ou doigts) est ajusté de manière à occlure complétement le tube et la pompe devient une pompe volumétrique. Le débit est alors proportionnel à la vitesse de rotation. Mais on verra dans cette étude qu'il n'est pas nécessaire d'occlure complétement le tube pour produire un transport. Ce mode non occlusif d'opération est particulièrement intéressant dans le cas du sang car il diminue les contraintes auxquelles les hématies se trouvent soumises, ce qui se traduit par un taux d'hémolyse plus faible.

Illustration élémentaire du mécanisme de transport péristaltique

Les principes physiques de ce mode de transport peuvent être simplement illustrés de la manière suivante. On considère un long tube flexible fermé à chaque extrémité, contenant un fluide visqueux. Un manchon de diamètre inférieur au diamètre nominal du tube coulisse vers la droite à la vitesse c produisant une onde progressive de contraction (Fig. 1.1a). Comme les extrémités sont fermées, il n'y a pas d'écoulement dans les parties du tube extérieures au manchon. Par contre, on peut montrer qu'il y a un écoulement rétrograde dans la direction opposée au déplacement du manchon. Pour montrer cela, il est commode de considérer un repère mobile lié au manchon (Fig. 1.1b). Dans ce repère, l'onde produite par le manchon et la forme du tube apparaissent comme stationnaires. Le champ de vitesse dans ce repère s'obtient en superposant au champ dans le repère fixe un écoulement uniforme de vitesse $-c$. Il résulte que, dans les sections extérieures au manchon, la vitesse du fluide mesurée dans le repère mobile est uniforme et égale à $-c$. Puisque dans le repère mobile la paroi apparaît stationnaire, l'équation de conservation de débit entraîne que la vitesse dans la partie contractée est également négative et excède c en valeur absolue. Pour revenir au repère fixe, on superpose le champ de vitesse $+c$, on voit donc que le fluide sous le manchon se déplace vers la gauche. Comme le fluide est visqueux, cet écoulement s'accompagne nécessairement d'un gradient de pression positif sous le manchon, la pression à droite du manchon étant supérieure à la pression à gauche. On peut donc considérer que le manchon ou l'onde qu'il produit fonctionne comme une pompe et dans ce cas produit une augmentation de la charge piézométrique.

Si les extrémités du tube ne sont plus fermées mais ouvertes, il y aura un

écoulement supplémentaire dépendant des pressions imposées aux extrémités. Si la différence de pression imposée est inférieure à celle produite par l'onde, il y aura un transport du fluide dans la direction de l'onde.

On peut tirer deux conclusions générales de cet exemple élémentaire. Premièrement la viscosité du fluide est un facteur essentiel du pompage péristaltique. Si le fluide n'était pas visqueux, il n'y aurait pas de gradient de pression dans la partie du tube comprimée par le manchon. Deuxièmement, si la différence de pression imposée n'est pas trop grande, le fluide se déplace en sens inverse de l'onde dans la partie du tube de section minimum et dans le sens de l'onde dans la partie de section maximum.

Plan des travaux

Ces travaux se divisent en deux parties. Dans la première, on formule la théorie générale du transport péristaltique produit par des ondes transversales sinusoïdales. On commence par présenter une solution analytique pour le cas des nombres de Reynolds nuls et des longueurs d'onde très grandes devant les dimensions transversales. Le rapport de l'amplitude de l'onde au diamètre du conduit reste arbitraire. Dans ce cas, les effets d'inertie sont négligeables et la pression est uniforme sur une section transversale. On trouve que le gradient de pression moyen ou l'accroissement de pression par longueur d'onde est une fonction linéaire décroissante du débit moyen. Des résultats particulièrement intéressants sont obtenus en examinant les trajectoires des particules fluides. On trouve que, sous certaines conditions de pression imposée aux limites, le fluide se trouvant à proximité des parois effectue un déplacement net au cours d'une période dans la direction opposée au sens de propagation des ondes même si le débit total va dans le sens de l'onde. Ce phénomène que nous baptisons "reflux" pourrait expliquer le phénomène de remontée des bactéries dans les uretères de la vessie vers les reins, observé parfois dans le cas d'infection de la vessie. En effet, cette remontée s'effectue en quelques heures, c'est-à-dire trop rapidement pour être expliqué par une simple diffusion. Un autre phénomène curieux découvert est celui de la formation, dans certaines conditions, de poches de recirculation centrées sur l'axe, qui se déplacent toutes entières avec une vitesse égale à celle de l'onde comme si elles étaient piegées par celle-ci.

On aborde ensuite le cas des nombres de Reynolds modérés mais non nuls et

des longueurs d'ondes assez grandes mais finies en recherchant une solution sous la forme de développement en séries suivant les puissances du nombre de Reynolds et du nombre d'onde. Cette étude permet d'examiner l'effet des forces d'inertie et de la courbure des lignes de courant sur les caractéristiques du pompage et les trajectoires des particules. Une comparaison avec quelques résultats expérimentaux disponibles permet de vérifier que cette solution reste valable même si le nombre de Reynolds atteint plusieurs dizaines. La solution d'ordre zéro obtenue pour un nombre de Reynolds nul possède également un domaine de validité surprenant.

La deuxième partie est consacrée à l'application de cette théorie du transport péristaltique à deux exemples spécifiques du domaine médical : le transport de l'urine par les uretères et le pompage du sang par les pompes à galets.

Après avoir rassemblé les observations urologiques, on montre à la lumière des résultats précédents que les ondes péristaltiques de l'uretère doivent satisfaire à certaines conditions pour être compatibles avec les observations de débits et de pression. Un doute subsiste quant à la forme et au diamètre intérieur de l'uretère contracté. Les radiographies ne permettent pas de les évaluer avec précision à cause de leur petitesse. Le modèle présenté est basé sur l'hypothèse d'une forme d'onde simplifiée, comportant trois créneaux. Ce modèle permet, à l'aide de calculs très simples de reproduire les enregistrements de pression et toutes les autres observations physiologiques tout en déterminant un éventail de valeurs possibles pour les dimensions intérieures de l'uretère. Ce modèle prédit également qu'il n'y a pas de reflux si l'enregistrement de pression est normal.

En ce qui concerne l'écoulement dans une pompe à galet, on montre que l'aplatissement du tube par le galet produit des contraintes extrêmement élevées dans le fluide ainsi qu'un très grand gradient de pression susceptible de créer une zone de cavitation. A la lumière d'autres travaux sur l'hémolyse il semble que ces deux phénomènes puissent être considérés comme responsables de l'hémolyse produit par ce type de pompe et que l'on puisse diminuer leur effet en apportant certaines modifications à la pompe et à son mode d'opération.

I - FORMULATION DES EQUATIONS DU TRANSPORT PERISTALTIQUE

1. 1 PARAMETRES

On considère pour fixer les idées une onde périodique de déplacement transversal se propageant dans les parois d'un conduit bidimensionnel de largeur 2a. Le cas où le conduit possède une symmétrie axiale de révolution n'introduit pas de différences qualitatives importantes et sera traité par la suite. Il en est de même pour le cas où les ondes sont des ondes solitaires non périodiques. Les calculs peuvent être menés assez loin sans expliciter la forme de l'onde. Lorsqu'il devient nécessaire de préciser celle-ci, on adopte une onde sinusoïdale d'amplitude b et de longueur d'onde λ. Les paramètres géométriques du problème sont le paramètre d'occlusion,

$$\phi = b/a \tag{1.1}$$

et le nombre d'onde

$$\alpha = 2\pi a/\lambda \tag{1.2}$$

On ne considère aussi que le cas où les deux parois restent symmétriques par rapport à l'axe. Hanin (17) et Butaud (9) ont montré le résultat intuitif que l'efficacité du pompage était moindre dans les autres cas. Le paramètre d'occlusion peut varier entre 0 (paroi rigide) et 1 (occlusion complète). On verra que ϕ s'approche de 1 pour les applications physiologiques. Le nombre d'onde, lui, caractérise la courbure et la pente des parois.

Un paramètre dynamique important est le nombre de Reynolds qui caractérise le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité. Il est défini ici par :

$$R_e = (ac/\nu)\ \alpha \tag{1.3}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde et ν la viscosité cinématique du fluide.

On verra par la suite que cette définition résulte naturellement de la normalisation employée et qu'elle est confirmée par un calcul à posteriori du rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité.

Il est intéressant de comparer ce nombre de Reynolds avec le paramètre de Wormesley (43) caractérisant un écoulement oscillatoire visqueux dans un long tuyau. Ce paramètre est défini par l'équation :

$$\beta = a \sqrt{\omega/\nu}$$

où ω est la fréquence angulaire de l'onde. On peut prendre ici $\omega = 2\pi c/\lambda$. On voit immédiatement que $R_e = \beta^2$. On peut donc dire par analogie avec le cas d'un écoulement oscillatoire que R_e caractérise également le rapport du temps de diffusion de la vorticité sur la distance a à la période de l'onde. Dans la limite $R_e \to 0$, l'inertie de l'écoulement est négligeable et les profils de vitesse à chaque instant seront localement paraboliques. Dans la limite opposée où $R_e \to \infty$, on se trouvera dans une situation analogue à celle des couches limites oscillatoires de Rayleigh pour lesquelles les profils de vitesse instantanés sont presque uniformes sur la majeure partie de la section.

Enfin un quatrième paramètre est nécessaire pour caractériser complétement l'écoulement. En effet le débit d'une pompe non volumétrique est une fonction décroissante de la pression de refoulement. On peut donc prendre comme paramètre, soit le débit moyen normalisé

$$\bar{Q} = \bar{q}/ac$$

ou le gradient de pression moyen le long du conduit. On désignera par $\bar{Q}_{max}$ le débit normalisé tel que la pression de refoulement soit égale à la pression d'aspiration et l'on se place dans la situation appelée régime de pompage telle que

$$0 < \bar{Q} < \bar{Q}_{max}$$

Remarque : Dans le cas où l'on ne se place plus dans le régime de pompage, le nombre de Reynolds défini précédemment par (1.3) ne représente plus nécessairement le rapport des forces d'inértie à celles de viscosité. Par exemple, s'il existe un gradient de pression élevé et favorable, le débit moyen $\bar{q}$ peut être grand même si ϕ est petit et le nombre de Reynolds approprié devient :

$$R_e' = (2\pi b/\lambda)\ (\bar{q}/\nu) \qquad (1.4)$$

Si $b/\lambda \to 0$, l'action des ondes péristaltiques devient négligeable et l'on se trouve dans le cas d'un écoulement de Poiseuille dans un conduit rigide. On vérifie que dans ce cas l'équation (1. 4) indique bien que les forces d'inertie sont nulles, ce qui n'est pas le cas de l'équation (1.3)

Les valeurs des paramètres pour diverses applications sont indiquées sur le tableau suivant

TABLEAU 1

Application	R_e	α	ϕ
Uretère	< 1	0,04	$\sim$ 1
Pompes à galets	20	0,5	$\sim$ 1
Voie digestive	10	2	0,3

1. 2 MISE EN EQUATION DU PROBLEME

Le point de départ constitué par les équations de Navier-Stokes qui, pour un fluide incompressible et un écoulement bidimensionnel s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1.5a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \qquad (1.5b)$$

Il est avantageux d'éliminer la pression p en dérivant (1.5a) par rapport à y et (1.5b) par rapport à x et en effectuant la soustraction des équations ainsi obtenues, le résultat s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$+ v\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - v\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 u - \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 v\right) \qquad (1.6)$$

En introduisant dans (1.6) la fonction de courant Ψ telle que $u = \Psi_y$ $v = -\Psi_x$, on obtient l'équation dite de vorticité

$$\nabla^2\Psi_t + \Psi_y \nabla^2\Psi_x - \Psi_x \nabla^2\Psi_y = \nu\nabla^2\nabla^2\Psi \qquad (1.7)$$

∇^2 représente le Laplacien et Ψ_x est une notation condensée pour $\partial\Psi / \partial x$.

Afin de mettre en évidence les paramètres sans dimensions, on introduit les variables normalisées suivantes :

$$\tau \equiv 2\pi ct/\lambda \ , \ \xi \equiv 2\pi x/\lambda \ , \ \eta = y/a \ , \ \chi = \Psi/ac$$

$$H \equiv h/a \ , \ P = p(2\pi a^2/\lambda\mu c) \ , \ U = u/c$$

A l'aide de ces variables, l'équation (1.7) devient :

$$R_e \left[\tilde{\nabla}^2\chi_\tau + \chi_\eta \tilde{\nabla}^2\chi_\xi - \chi_\xi \tilde{\nabla}^2\chi_\eta \right] = \tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\chi \qquad (1.8)$$

où $\tilde{\nabla}^2 = \partial^2/\partial\eta^2 + \alpha^2\partial^2/\partial\xi^2$ représente un Laplacien modifié et les paramètres α et R_e sont ceux définis par les équations (1.2) et (1.3) respectivement. Une fois l'équation (1.8) résolue pour χ, les gradients de pression sont calculés à partir des équations (1.5a) et (1.5b), qui, exprimées en fonction des variables normalisées, s'écrivent respectivement

$$R_e \left[\chi_{\eta\tau} + \chi_\eta\chi_{\eta\xi} - \chi_\xi\chi_{\eta\eta} \right] = -P_\xi + \alpha^2\chi_{\eta\xi\xi} + \chi_{\eta\eta\eta} \qquad (1.9)$$

$$\alpha^2 R_e \left[\chi_{\xi\tau} + \chi_\eta\chi_{\xi\xi} - \chi_\xi\chi_{\xi\eta} \right] = +P_\eta + \alpha^2 \left[\alpha^2 \chi_{\xi\xi\xi} + \chi_{\xi\eta\eta} \right] \qquad (1.10)$$

On voit que les équations (1.8) - (1.10) se simplifient considérablement si le nombre de Reynolds R_e et le nombre d'onde α sont petits devant 1.

Enfin la quatrième condition aux limites est obtenue en imposant le débit ou le gradient de pression moyen. Par exemple, compte-tenu de (1.11a), le débit normalisé s'exprime naturellement en fonction de la fonction de courant et l'on a

$$\chi\ (H) = Q \qquad (1.11d)$$

1. 4 TRAVAUX PRECEDENTS

Les premiers travaux publiés sur le pompage péristaltique sont ceux de Shapiro (35) et de Burns et Parkes (8) qui se sont placés dans le cas d'un train d'ondes transversales sinusoïdales. Ce sujet a depuis inspiré de nombreux investigateurs. Leurs travaux correspondent en général à des cas limites où l'un ou plusieurs paramètres α, R_e, et ϕ sont petits devant l'unité. Le tableau 2 résume les hypothèses employées par différents investigateurs et l'on peut voir qu'il n'existe pas encore de solution complétement générale valable quelque soit les valeurs des paramètres.

TABLEAU 2

Auteurs	Géométrie	R_e	α	ϕ
Shapiro (35) Shapiro, Jaffrin Weinberg (36)	plane et axi-symétrique	0	0	arbitraire
Burns et Parkes (8)	plane et axi-symétrique	0	arbitraire	<< 1
Fung et Yih (15)	plane	arbitraire	arbitraire	<< 1
Hanin (17)	plane	arbitraire	0	<< 1
Chow (10)	axisymétrique	modéré	modéré	<< 1
Zien et Ostrach (45)	plan	modéré	petit	<< 1
Jaffrin (19)	plan	modéré	modéré	arbitraire

.../...

Yin et Fung (43)	axisy-métrique	arbitraire	arbitraire	<< 1
Li (28)	axisymé-trique			
Mittra et Prasad (31)	plan	arbitraire	arbitraire	<< 1
Tong et Vawter (39)	axisy-métrique	0	arbitraire	arbitraire

Les travaux de Shapiro (35) étaient motivés par l'étude du fonctionnement de l'inertie et se placaient dans l'hypothèse des nombres de Reynolds très faibles et des grandes longueurs d'onde, conditions satisfaites dans l'uretère. Cette étude fut ensuite complétée et étendue au cas d'une géométrie circulaire par Shapiro, Jaffrin et Weinberg (36, 37) qui découvraient deux phénomènes inattendus en examinant les trajectoires des particules fluides. Dans certaines conditions, un transport rétrograde ou reflux (en sens contraire de l'onde) se produit au voisinage de la paroi tandis que le reste du fluide se déplace dans le sens de l'onde. L'autre phénomène baptisé "piégeage" (trapping en anglais) consiste en l'existence de poches de recirculation du fluide situées sous les sommets de l'onde et qui se déplacent globalement à la vitesse de l'onde comme si elles étaient piégées par celle-ci.

Burns et Parkes (8) se placent également dans l'hypothèse de Stokes mais lèvent la restriction des grandes longueurs d'onde. Cependant leur solution est exprimée à l'aide de développements suivant les puissances croissantes du paramètre d'occlusion ϕ ce qui limite la validité des résultats aux faibles valeurs de ϕ . On peut également rapprocher de ces travaux ceux de Barton et Raynor (2) qui ont résolu les équations de Stokes pour une géométrie de révolution dans l'hypothèse des grandes longueurs d'onde. Leur solution est ensuite appliquée au cas du transport du bol intestinal.

Un autre type de solution du transport péristaltique est présenté par Fung et Yih (15) pour une géométrie plane. L'inertie du fluide n'est plus négligée et la solution est obtenue sous la forme d'un développement suivant les puissances croissantes de ϕ, limité à l'ordre 2. Les auteurs introduisent une définition du reflux différente de celle de Shapiro, Jaffrin et Weinberg (36),

qui allait alimenter une contreverse pendant quelques années. Il calculent le transport moyen du fluide en prenant la moyenne eulérienne de la vitesse, c'est-à-dire la moyenne sur une période de la vitesse instantanée au lieu de la moyenne Lagrangienne, c'est-à-dire calculée en suivant la particule dans son mouvement. Il est curieux de noter que la définition de Fung et Yih conduit en ce qui concerne le reflux à des résultats opposés aux résultats corrects. La vitesse moyenne eulérienne est négative au centre du tube. Cette solution a été ensuite étendue au cas d'un tube à section circulaire par Yin et Fung (45) et par Chow (10). Hanin (17), dans un article contemporain de celui de Fung et Yih a également traité la cas du pompage péristaltique avec un nombre de Reynolds arbitraire mais dans l'hypothèse où $\alpha \to 0$ et où le gradient de pression est nul.

Par la suite sont apparus des prolongements à la solution de Shapiro, Jaffrin et Weinberg (36) sous la forme de développements limités suivant les puissances de R_e et de α (Jaffrin (19), Zien et Ostrach (46)) ou suivant les puissances de α seulement (Li (27, 28)).

Ces travaux permettent de juger des modifications apportées à l'écoulement par les effets d'inertie et de courbures des lignes de courant. La solution de Jaffrin qui est exposée en détail au chapitre 3 sépare les effets d'inertie et de courbure qui peuvent ensuite être combinés linéairement. La solution de Zien et Ostrach, elle, ne sépare pas ces effets, car elle consiste en un développement en α et R_e comme paramètre. Les résultats de Li confirment ceux de Shapiro, Jaffrin et Weinberg en ce qui concerne le reflux pour les faibles valeurs de α. Par contre lorsque $\alpha > \pi$ le reflux émigre du voisinage des parois vers le centre du tube.

Le cas des faibles longueurs d'onde a été traité par Tong et Vawter (39) pour un écoulement à symétrie de révolution et aux nombres de Reynolds nuls en utilisant la méthode des éléments finis. Leurs résultats confirment que le reflux se produit au centre du tube pour les faibles longueurs d'onde.

Mittra et Prasad (31) ont traité le problème d'une manière analogue à celle de Fung et Yih, c'est-à-dire dans la limite $\Psi \to 0$ mais en couplant aux équations du fluide celles de la déformation de la paroi. Les conditions aux limites sont un peu différentes suivant les hypothèses faites sur la nature de la paroi. Leurs résultats sont un peu plus généraux que ceux de Fung et Yih,

car ils sont étendus au cas où un gradient de pression quelconque est imposé.

Parmi les travaux traitant du transport péristaltique avec des conditions aux limites différentes, on peut citer ceux de Lardner et Shack (24) où la paroi est remplacée par les cils produisant une onde métachronale et ceux de Ross et Corrsin (47) sur le mouvement du mucus dans la trachée, écoulement comportant une surface libre.

Le transport péristaltique a fait également l'objet de plusieurs études expérimentales. Latham et Shapiro (25) ont mesuré la caractéristique pression-débit dans le cas des faibles nombres de Reynolds à l'aide d'une machine péristaltique rotative. Le conduit était formé d'un tube en vinyl adossé à un demi-cercle en plexiglass et comprimé de l'autre côté par des galets montés sur des bras de longueurs variables et tournant autour d'un axe vertical. Ce système produisait une onde approximativement sinusoïdale sur la paroi mobile, mais les effets des bords étaient importants et l'écoulement n'était plus rigoureusement bidimensionnel. Néanmoins, les résultats expérimentaux confirmaient l'existence d'une relation linéaire entre les valeurs moyennes du débit et du gradient de pression, voisine de celle produite par la théorie. Eckstein (13) et Weinberg, Eckstein et Shapiro (40) ont répété l'expérience avec un appareillage circulaire beaucoup plus perfectionné où le tube de vinyl était remplacé par un canal véritablement bidimensionnel permettant des mesures de la pression en plusieurs points de l'onde. Les mesures ont permis de confirmer la théorie de Shapiro, Jaffrin et Weinberg et à l'aide d'injection de colorants de vérifier qualitativement l'existence d'un reflux près des parois et de lignes de courants "piégées". Une autre vérification expérimentale a été effectuée par Yin et Fung (44) avec un dispositif linéaire, formé d'une courroie flexible se déplacant contre des barres transversales.

II - POMPAGE PÉRISTALTIQUE DANS LA LIMITE DES NOMBRES DE REYNOLDS NULS ET DES LONGUEURS D'ONDE INFINIES

2. 1 SOLUTION EN DEVELOPPEMENT EN SERIE

On a vu que l'équation (1. 8) dépend de deux paramètres α et R_e. Dans un grand nombre d'applications physiologiques, ces paramètres sont plus petits que 1 (voir tableau 1). Il est donc logique de rechercher une solution à l'équation (1. 8) sous la forme d'un développement en série, en fonction de ces deux paramètres.

En supposant que ces paramètres sont du même ordre de grandeur et en observant que α intervient par son carré, on est conduit au développement suivant :

$$\chi = \chi_o + R_e \chi_1 + R_e^2 \chi_2 + \alpha^2 \tilde{\chi}_2 + \cdots \tag{2.1}$$

En substituant l'équation (2.1) dans (1.8) et en identifiant les coefficients des puissances semblables de R_e et α, on obtient successivement pour la fonction de courant dans le repère lié à l'onde :

$$\chi_{o\eta\eta\eta\eta} = 0 \tag{2.2}$$

$$\chi_{1\eta\eta\eta\eta} = \chi_{o\eta}\chi_{o\eta\eta\xi} - \chi_{o\xi}\chi_{o\eta\eta\xi} + \chi_{o\eta\tau} \tag{2.3}$$

$$\chi_{2\eta\eta\eta\eta} = \chi_{o\eta}\chi_{1\xi\eta\eta} + \chi_{1\eta}\chi_{o\xi\eta\eta} - \chi_{o\xi}\chi_{1\eta\eta\eta} - \chi_{1\xi}\chi_{o\eta\eta\eta} + \chi_{1\tau\eta\eta} \tag{2.4}$$

$$\tilde{\chi}_{2\eta\eta\eta\eta} = -2\chi_{o\eta\eta\xi\xi}$$

De même la substitution de (2.1) dans les conditions aux limites (1.11) produit sur l'axe, $\eta = o$

$$\chi_o = \chi_1 = \chi_2 = \tilde{\chi}_2 = o \tag{2.6a}$$

$$\chi_{o\eta\eta} = \chi_{1\eta\eta} = \chi_{2\eta\eta} = \tilde{\chi}_{2\eta\eta} = o \tag{2.6b}$$

à la paroi $\eta = H$, en supposant que la vitesse de la paroi est uniquement transversale

$$\chi_{o\eta} = \chi_{1\eta} = \chi_{2\eta} = \tilde{\chi}_{2\eta} = o \tag{2.6c}$$

La quatrième condition aux limites doit être elle aussi développée suivant les puissances de R_e et α

On écrit :

$$Q = Q_o + R_e Q_1 + R_e^2 Q_2 + \alpha^2 \tilde{Q}_2 + ... \tag{2.7}$$

Il vient donc, par identification des puissances de R_e et α^2 dans (1.11d) pour $\eta = H$

$$\chi_o = Q_o \tag{2.8a}$$

$$\chi_1 = Q_1 \tag{2.8b}$$

$$\chi_2 = Q_2$$

$$\tilde{\chi}_2 = \tilde{Q}_2 \tag{2.8d}$$

où Q_o, Q_1, Q_2 et $\tilde{Q}_2$ sont des fonctions de ξ et τ dans le cas général.

2. 2 SOLUTION POUR $R_e = \alpha = o$

L'équation (2.2) peut être intégrée successivement par rapport à η pour donner, avec l'aide des conditions aux limites (2.6)

$$\chi_o = -\frac{3}{H^3} Q(\xi,\tau) \left(\frac{\eta^3}{6} - \frac{H^2\eta}{2}\right) \tag{2.9}$$

L'équation (2.9) montre que le profil des vitesses instantanées est à chaque section une fonction parabolique de η. Le gradient longitudinal de pression, s'obtient à partir de (1.9). On trouve

$$P_{o\xi} = \chi_{o\eta\eta\eta} = -3\frac{Q_o(\xi,\tau)}{H^2} \tag{2.10}$$

On retrouve bien localement les caractéristiques d'un écoulement de Poiseuille ce qui est normal puisque la condition $R_e = o$ entraîne l'absence complète d'inertie et la condition $\alpha = o$ signifie que la courbure des lignes de courant est négligeable et qu'il n'y a donc pas de gradient transversal de pression.

Il est intéressant de se placer dans un repère lié à l'onde. En effet pour un observateur situé sur ce repère, la paroi ne change pas de forme et apparaît comme rigide. Il résulte que le débit normalisé dans ce repère $\hat{Q}$ ne dépend que du temps τ et que l'on peut écrire :

$$Q_o(\xi,\tau) = \hat{Q}_o(\tau) + H \tag{2.11}$$

L'on va maintenant chercher les conditions telles que l'écoulement soit stationnaire dans un repère lié à l'onde, c'est-à-dire tel que $\hat{Q}$ soit constant. En combinant (2.10) et (2.11), on tire :

$$P_{o\xi} = -3\left[\hat{Q}_o(\tau) + H\right] / H^3 \tag{2.12}$$

L'équation (2.12) montre que si la contraction est sévère (H << 1), les gradients de pression sont très élevés, résultat en accord évidemment avec la théorie de la lubrification des paliers. En intégrant l'équation (2.12) par rapport à α sur la longueur du conduit, on obtient la relation entre la différence de pression entre les extrémités du conduit et le débit. On trouve :

$$\Delta P_L(\tau) = -3\int_o^L \frac{d\xi}{H^2} - 3\,\hat{Q}(\tau)\int_o^L \frac{d\xi}{H^3} \qquad (2.13)$$

On a supposé que H est une fonction périodique de (ξ,τ). On peut remplacer $d\xi$ par $d(\xi-\tau)$ dans (2.13) puisque l'intégration est effectuée en gardant τ constant. Il s'ensuit que si la longueur L du conduit est égale à un nombre entier de longueurs d'onde, les intégrales de l'équation (2.13) seront égales à des constantes et par conséquent indépendantes du temps. En effet, l'aire située sous une fonction périodique et prise entre des bornes distantes d'un multiple de la longueur d'onde ne dépend pas de la position des bornes. Si maintenant la différence de pression entre les extrémités ΔP_L est elle aussi constante, ce qui est le cas lorsque l'écoulement se produit entre deux réservoirs à niveau constant, il résulte de l'équation (2.13) que le débit $\hat{Q}$ est lui aussi constant et que l'écoulement apparaît comme stationnaire dans un repère lié à l'onde. Nous nous placerons dans ce cas-là pour la suite des calculs, car cela introduit des simplifications importantes et ne constitue pas une restriction génante pour les applications physiologiques.

Dans ce cas, l'équation de la fonction de courant (2.9) s'écrit, à l'aide de (2.11)

$$\chi_o = -\frac{3}{2}\,(\hat{Q}_o + H)\,\left(\frac{\delta^3}{3} - \delta\right) \qquad (2.14)$$

avec $\delta = \eta/H$

Il est commode d'utiliser comme paramètre le débit moyen $\bar{Q}_o$ qui est

donné par :

$$\bar{Q}_o = \int_o^1 Q_o d\tau = \hat{Q}_o + \int_o^1 H d\tau = \hat{Q}_o + 1 \qquad (2.15)$$

Avec l'aide de (2.15) l'équation (2.14) devient

$$\chi_o = -\frac{3}{2}(\bar{Q}_o + H - 1)(\delta^3/3 - \delta) \qquad (2.14b)$$

La fonction de courant dans le repère lié à l'onde est donnée par

$$\hat{\chi}_o = \chi_o - \eta \qquad (2.15)$$

Caractéristique pression-débit de l'écoulement

Les composantes longitudinales et transversales de la vitesse s'obtiennent en dérivant l'équation (2.14b) par rapport à η et à ξ respectivement. Il vient :

$$U = \chi_{o\eta} = \frac{3}{2H}(\bar{Q}_o + H - 1)(1 - \delta^2) \qquad (2.17a)$$

$$V = -\chi_{o\xi} = \frac{3}{2}\alpha H_\xi \left[\left(\frac{1 - \bar{Q}_o}{H}\right)\delta + \left(\frac{2}{3} - \frac{1 - \bar{Q}_o}{H}\right)\delta^3\right] \qquad (2.17b)$$

Le profil de vitesse longitudinale est parabolique à chaque instant comme dans un écoulement de Poiseuille.

Pour pousser plus loin les calculs, il faut définir complétement la forme de l'onde. Afin de permettre une comparaison directe avec les autres travaux, on choisit un train d'ondes sinusoïdales périodique dont l'équation dans le repère fixe est

$$H = 1 + \varphi \sin(\xi - \tau) \qquad (2.18)$$

ou dans le repère lié à l'onde :

$$\hat{H} = 1 + \phi \sin \xi \qquad (2.18b)$$

On en déduit que le débit à une section donnée est une fonction sinusoïdale du temps.

$$Q = \bar{Q}_o + H - 1 \qquad (2.19)$$

La vitesse longitudinale est positive si

$$\bar{Q}_o + H - 1 = \bar{Q}_o + \phi \sin (\hat{\xi} - \tau) > o$$

c'est-à-dire dans les parties élargies de l'onde telles que

$$- \sin \xi < \bar{Q}_o / \phi$$

Elle est négative dans les parties resserées.

Si $\bar{Q}_o < \phi$, il existe 2 sections par longueur d'onde telles que la vitesse est nulle. Elles sont définies par

$$\hat{\xi}_o = \text{Arc sin } (\bar{Q}_o / \phi) \qquad (2.20)$$

Les distributions de vitesse longitudinale sont illustrées sur la Figure 2.1. Il est visible que le débit est négatif pendant une partie du cycle durant la phase de contraction.

Une caractéristique importante de l'écoulement est la relation entre le débit moyen et le gradient de pression moyen. Comme avec les variables normalisées, les moyennes temporelles et spatiales sont égales, on peut parler indifféremment de gradient de pression moyen ou d'accroissement de pression par longueur d'onde. En utilisant les équations (2.13) et

(2.18) pour L = λ, on trouve

$$\Delta P_{o\lambda} = \frac{3\pi\phi^2}{2(1-\phi^2)^{5/2}} \left[3 - \frac{2+\phi^2}{\phi^2} \bar{Q}_o\right] \qquad (2.21)$$

De (2.19), on tire

$$\bar{Q}_o = \frac{3\phi^2}{2+\phi^2} - \frac{1}{3\pi} \frac{(1-\phi^2)^{5/2}}{2+\phi^2} \Delta P_{o\lambda} \qquad (2.22)$$

Le débit moyen est une fonction linéaire du gradient de pression moyen, ce qui est caractéristique des écoulements aux faibles nombres de Reynolds. (2.20) suggère en outre que le débit peut-être interprété comme la somme de 2 contributions. Le premier terme représente la contribution au débit des ondes péristaltiques en l'absence de gradient de pression moyen tandis que le deuxième terme est analogue à un débit de "fuite", rétrograde, si le gradient de pression moyen est positif. Le rendement des ondes péristaltiques est maximum lorsque l'occlusion est complète, pour $\phi = 1$, car alors le débit de "fuite" est identiquement nul et les ondes péristaltiques fonctionnent comme une pompe volumétrique. Le débit normalisé dans ce cas est égal à 1.

On définit le régime de "pompage" des ondes péristaltiques comme le régime dans lequel à la fois $\Delta P_{o\lambda}$ et $\bar{Q}_o$ sont positifs. Les limites de ce domaine sont donc

$$\bar{Q}_o = o$$

qui correspond au gradient de pression maximum

$$(\Delta P_{o\lambda})_{max} = \frac{9\pi\phi^2}{(1-\phi^2)^{5/2}} \qquad (2.23)$$

et $\Delta P_{o\lambda} = o$

qui correspond au débit maximum

$$\bar{Q}_{o\ max} = 3\phi^2/(2 + \phi^2) \tag{2.24}$$

On peut réaliser facilement ces conditions limites dans un dispositif expérimental. On obtient le gradient de pression maximum lorsque le conduit est obturé à son extrémité et le débit maximum lorsque l'écoulement a lieu entre deux réservoirs dont les surfaces libres sont au même niveau. C'est dans ce domaine que les ondes péristaltiques fonctionnent effectivement comme une pompe, c'est-à-dire produisent une charge piézométrique et un débit.

On imagine aisément ce qui se passe en dehors du régime de pompage tel qu'il a été défini. S'il existe un gradient moyen de pression favorable (négatif), le débit produit par ce gradient de pression s'ajoute au débit produit par les ondes péristaltiques $\bar{Q}_{o\ max}$. Inversement si la différence de niveau entre les réservoirs amont et aval est telle que le gradient de pression est positif et supérieur au gradient de pression moyen maximum l'action des ondes péristaltiques ne parvient pas à surmonter le débit rétrograde du au gradient de pression et le débit résultant est négatif.

Dans le cas des faibles degrés d'occlusion ($\phi << 1$), les équations (2.23) et (2.24) se simplifient respectivement pour donner :

$$\Delta P_{o\lambda\ max} = 9\pi\phi^2 \tag{2.25}$$

$$\bar{Q}_{o\ max} = 3\phi^2/2 \tag{2.26}$$

Aux faibles valeurs de ϕ, le gradient de pression moyen et le débit produit par les ondes péristaltiques sont d'ordre ϕ^2. Dans la limite opposée de l'occlusion complète ($\phi \to 1$), le gradient de pression maximum devient très grand

$$(\Delta P_{o\lambda})_{max} \to 9\pi\ (1 - \phi^2)^{-5/2} \tag{2.27}$$

et le débit normalisé tend vers 1.

Une vérification expérimentale de la relation gradient de pression-débit a été effectuée par Weinberg et al. (40). Il est nécessaire de décrire l'appareil utilisé pour mettre en relief les différences entre la géometrie simple employée par la théorie fondamentale et celle dictée par les exigences de la construction. Il est bien sûr presque impossible de produire un écoulement strictement bi-dimensionnel plan. Le conduit de l'appareillage de section rectangulaire posséde une hauteur de 25 cm pour une largeur moyenne de 2 à 1,25 cm de manière à s'approcher le plus possible des conditions bidimensionnelles. Ce conduit est limité d'un côté par une paroi rigide semi-circulaire d'un rayon de 42 cm de manière à minimizer les effets dus à la courbure. L'autre côté est constitué par une bande flexible sur laquelle s'appuient les galets cylindriques montés sur des bras de différentes longueurs. Les longueurs de ces bras sont calculés de manière à ce que, en tournant, ils impriment par le jeu des galets des ondes progressives de déplacement radial dans la bande flexible. Le paramètre α est égal à 0,088. Dans ce cas, les résultats de la théorie d'un conduit symétrique ne sont pas modifiés par le fait qu'une des parois est rigide. Le débit est ajusté en variant la hauteur des réservoirs aux extrémités. Les résultats expérimentaux confirment la linéarité entre le débit et le gradient de pression moyen. Par contre les points expérimentaux se situent en dessous de la ligne théorique. Pour un gradient de pression donné, le débit mesuré expérimentalement est inférieur au débit théorique. Cette différence est d'autant plus grande que le gradient de pression est plus grand. Elle est à peu près nulle pour $\Delta P_{o\lambda} = o$. Ceci indique qu'elle est sans doute due en partie à un débit rétrograde ayant lieu dans les parties du conduit où les ondes péristaltiques sont inopérantes, par exemple à proximité des joints inférieurs et supérieurs où la longueur locale est supérieure à la largeur du reste du conduit. Dans cette hypothèse, on peut alors effectuer une correction de la théorie de base , qui amène celle-ci en accord avec les résultats expérimentaux (Figure 2. 2).

Rendement du pompage

Il est intéressant de calculer le rendement de ce mode de pompage pour le comparer éventuellement avec le rendement d'autres types de pompe. On peut définir le rendement de pompage comme le rapport de l'énergie utile emmagasinée dans le fluide au travail fourni par les parois, par lon-

gueur d'onde et par période, il vient alors pour ce rendement

$$r = \frac{\bar{q}\ \Delta P_\lambda}{-\frac{1}{T}\int_o^T \int_o^\lambda \left(p + \tau_o \frac{\partial h}{\partial x}\right) \frac{\partial h}{\partial t}\ dx\ dt} \qquad (2.28)$$

Lorsque $\alpha << 1$ la contribution du terme de frottement $\tau_o \frac{\partial h}{\partial x}$ au dénominateur de l'équation (2.28) est négligeable. Dans ces conditions, et en utilisant les équations (2.12) et (2.21), on trouve

$$r = \frac{\bar{Q}_o/\bar{Q}_{o\,max}\ (1 - \bar{Q}_o/\bar{Q}_{o\,max})}{(1 + 2\phi^2)(2 + \phi^2)/9\phi^2 - \bar{Q}_o/\bar{Q}_{o\,max}} \qquad (2.29)$$

Les résultats sont représentés sur la figure 2.3 pour différentes valeurs de ϕ. On observe que le rendement n'atteint des valeurs élevées que si le degré d'occlusion ϕ est élevé et dans une zone assez restreinte de débit. Dans la limite de l'occlusion complète ($\phi = 1$), le seul cas possible est $\bar{Q}_o = \bar{Q}_{o\,max}$, autrement la vitesse deviendrait infinie au point d'occlusion. Dans ce cas, un examen de l'équation (2.29) montre que $r \to 1$, ce qui n'est pas surprenant puisque l'on a affaire à une pompe volumétrique et que l'on a négligé les forces de frottement.

Etude des trajectoires des particules fluides

On a vu que dans une section donnée la vitesse longitudinale était alternativement positive et négative et donc que le fluide se déplacait alternativement avec et en sens contraire de l'onde. On examine ici la possibilité pour des particules fluides d'effectuer une progression nette dans le sens opposé à l'onde bien que le débit total soit dans la direction de l'onde. La motivation de cette recherche est d'ordre physiologique. En effet, les urologues ont observé dans le cas d'injection de la vessie que des bactéries se déplacaient parfois de la vessie vers les reins en sens inverse des ondes péristaltiques beaucoup plus rapidement que par un simple mouvement de diffusion. De même, des gastroentérologues ont constaté chez le chien que des substances injectées au rectum se re-

trouvaient ensuite dans l'estomac bien que l'on aie pas observé d'ondes péristaltiques rétrogrades. Il est donc légitime de chercher une explication à ce phénomène.

Deux méthodes sont possibles :

L'une consiste à calculer les équations des trajectoires des particules fluides à partir du système d'équations

$$\frac{d\xi}{d\tau} = U = \frac{3}{2H}(\bar{Q}_o + H - 1)(1 - \delta^2) \qquad (2.30a)$$

$$\frac{dn}{d\tau} = V = \frac{3}{2}\alpha\left[\frac{(1 - \bar{Q}_o)}{H}\delta + \left(\frac{2}{3} - \frac{1 - \bar{Q}_o}{H}\right)\delta^3\right](\phi\cos(\xi-\tau)) \qquad (2.30b)$$

Le mouvement des particules fluides est évidemment un mouvement répétitif dont la période est l'intervalle de temps au bout duquel une particule fluide occupe à nouveau la même position par rapport à l'onde. Il est clair, à cause de la périodicité des ondes péristaltiques, que le mouvement pendant la période suivante sera identique. En intégrant numériquement le système (2.30), on constate alors qu'en général les particules fluides effectuent un net déplacement $\Delta\xi^*$, soit dans le sens de l'onde, soit en sens contraire au cours d'une période du mouvement et que cette période est de ce fait différente de la période de l'onde elle-même. Quelques trajectoires typiques sont représentées sur la figure 2.4. On voit que les particules situées près de l'axe effectuent un déplacement vers la droite (dans la direction de propagation des ondes) même lorsque le débit est nul tandis que les particules loin de l'axe effectuent un déplacement vers la gauche (en sens contraire des ondes). Si le débit maximum ($\bar{Q}_o = \bar{Q}_{o\,max}$), les deux particules effectuent un déplacement positif mais celui des particules loin de l'axe est plus faible que celui de celle près de l'axe.

Nous désignerons par **"reflux"** ce déplacement en sens contraire de l'onde qui se produit pour des particules loin de l'axe si le débit n'est pas trop grand. Il est intéressant de remarquer que la moyenne de la vitesse eulérienne utilisée par Fung pour définir le reflux donne des résultats opposés : on a en effet sur l'axe,

$$\bar{U} = \int_0^{2\pi} U \, d\tau = \frac{3}{2}\left[1 + (\bar{Q}_o - 1)\frac{2\pi}{\sqrt{1-\phi^2}}\right] \qquad (2.31)$$

Pour $\bar{Q}_o = 0$ $\qquad \bar{U} = 1 - \frac{2\pi}{\sqrt{1-\phi^2}} < 0$

Cas des particules sur l'axe

Par symétrie, les particules qui se trouvent sur l'axe y restent et leur mouvement est particulièrement simple. L'équation (2.30a) peut être intégrée analytiquement pour donner le déplacement $\Delta\xi^*$ au cours d'une période

$$\Delta\xi^* = 3\left[\frac{1 - \bar{Q}_o}{\sqrt{(1 - \frac{3}{2}\bar{Q}_o) - (\frac{\phi}{2})^2}} - 1\right] \qquad (2.32)$$

tandis que la période du déplacement est

$$\Delta\tau^* = 1 + \Delta\xi^* \qquad (2.33)$$

On vérifie que :

$$\Delta\xi^* > 0 \quad \text{si} \quad \frac{2 - \sqrt{4+5\phi^2}}{5} < \bar{Q}_o < \frac{2 + \sqrt{4+5\phi^2}}{5}$$

Le déplacement des particules sur l'axe est toujours positif dans le régime de pompage. Les déplacements sont représentés sur la figure 2.5 en fonction du débit et de ϕ .

Cette méthode par contre ne permet pas de connaître facilement le débit rétrograde. Pour cela on procède de la manière suivante. Puisque l'écoulement est stationnaire dans un repère lié à l'onde, les lignes de courant et les trajectoires coincident. On peut alors utiliser la fonction de courant dans ce repère comme moyen d'identifier les particules fluides. Le débit instantané entre l'axe du conduit et la ligne de courant identifié par $\hat{\chi}$ sera :

$$Q_\chi = \int_o^{\eta(\hat{\chi},\xi,\tau)} \chi_\eta \, d\eta \qquad (2.34)$$

où $\eta\,(\hat{\chi}, \xi, \tau)$ désigne l'ordonnée d'un point sur la ligne de courant $\hat{\chi}$.

En intégrant l'équation (2.34) sur une période T, on obtient

$$(\bar{Q})_\chi = \hat{\chi} + \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} (\hat{\chi},\xi,\tau) \, d\tau \qquad (2.35)$$

Puisque l'intégrale de l'équation (2.35) doit être calculée à ξ constant, on peut substituer $-d\hat{\xi}$ pour $d\tau$ en vertu de la relation $\hat{\xi} = \xi - \tau$. La quantité η est en fait une fonction de $\hat{\chi}$ et $\hat{\xi}$ seulement et est calculée en résolvant l'équation (2.14b) pour η.

On peut ensuite calculer $\bar{Q}_\chi$. Si un reflux existe près de la paroi ainsi qu'il a été montré dans la section précédente, le débit moyen limité à ligne de courant $\bar{Q}_\chi$ doit, pour une ligne de courant particulière, dépasser le débit total $\bar{Q}_o$. On dispose ainsi d'un critère commode pour déterminer la présence de reflux et même pour évaluer son importance.

Critère de reflux à la paroi

Pour cela, on utilise un développement limité dans le repère lié à l'onde, au voisinage de la paroi pour la fonction de courant suivant le petit paramètre :

$$\varepsilon = \hat{\chi} - \hat{\chi}_p = \hat{\chi} + 1 - \bar{Q}_o \tag{2.36}$$

On suppose que l'équation d'une ligne de courant au voisinage de la paroi est donnée par

$$\eta(\xi,\phi,\bar{Q}_o,\varepsilon) = H + a_1\ (\xi,\phi,\ \bar{Q}_o)\ \varepsilon + a_2(\xi,\phi,\ \bar{Q}_o)\ \varepsilon^2 + \ldots \tag{2.37}$$

En substituant l'équation (2.37) dans (2.14b), on détermine les coefficients a_1 et a_2 et l'on trouve :

$$\eta = H - \varepsilon - \frac{3}{2}\ \frac{\varepsilon^2}{H}\ \left(\frac{\bar{Q}_o - 1}{H} + 1\right) + \ldots \tag{2.38}$$

L'intégrale de l'équation (2.35) peut être calculée avec l'aide de l'équation (2.38) pour donner :

$$\bar{Q}_\chi = \bar{Q} - \frac{3}{2}\ \varepsilon^2\ \frac{(\bar{Q}_o - \phi^2)}{(1 - \phi^2)^{3/2}} + \ldots \tag{2.39}$$

L'équation (2.39) montre que le débit $\bar{Q}_\chi$ est supérieur à $\bar{Q}_o$, donc qu'il y a effectivement un reflux à la paroi pour :

$$\bar{Q}_o < \phi^2 \tag{2.40}$$

On vérifie facilement que cette valeur critique du débit est inférieure au débit maximum.

Solution pour des ondes de petite amplitude ($\phi << 1$)

On peut dans ce cas calculer analytiquement la fraction de reflux R.

Pour les petites valeurs de ϕ, on sait que $\bar{Q}_o$ est d'ordre ϕ^2. En outre H - 1 est d'ordre ϕ. L'examen de l'équation (2.14b) suggère que l'équation des lignes de courant peut être développée suivant les puissances croissantes de ϕ.

$$\eta(\xi,\phi,\bar{Q}_o,\chi) = -\hat{\chi}\left[1+b_1(\hat{\xi},\bar{Q}_o,\hat{\chi})\ \phi + b_2(\xi,\bar{Q}_o,\hat{\chi})\ \phi^2 + \ldots\right] \qquad (2.41)$$

En substituant l'équation (2.41) dans (2.14b) et en déterminant les coefficients b_1 et b_2, on obtient :

$$\eta = -\hat{\chi}\left\{1 + \frac{3}{2}\left(1-\frac{\hat{\chi}^2}{3}\right)(\bar{Q}_o + \sin\xi)\,\phi + \frac{3}{4}\left[(\hat{\chi}^2-1)^2 \sin^2\xi\right]\phi^2 + \ldots.\right\} \qquad (2.42)$$

Avec l'aide des équations (2.37) et (2.30) on peut calculer analytiquement le débit entre l'axe et la ligne de courant $\hat{\chi}$. On trouve

$$\bar{Q}_\chi = -\frac{3}{2}\hat{\chi}\phi^2\left[\frac{(\hat{\chi}^2-1)^2}{4} + \frac{\bar{Q}_o}{\phi^2}\left(1-\frac{\hat{\chi}^2}{3}\right)\right] \qquad (2.43)$$

La ligne de courant $\hat{\chi}$ telle que ce débit est maximum s'obtient en égalant à zéro $d\bar{Q}_\chi/d\hat{\chi}$, soit

$$\chi^* = \left\{\frac{1}{5}\left[1 + 4\,\bar{Q}_o/\phi^2\right]\right\}^{1/2} \qquad (2.44)$$

La fraction de reflux est définie par

$$R^* = \left[(\bar{Q}_\chi)_{max} - \bar{Q}_o\right]/\bar{Q}_o \qquad (2.45)$$

Il vient

$$R = \frac{(1 + 4\bar{Q}_o)^{3/2} (6 - \bar{Q}_o)}{25\sqrt{5}\ \bar{Q}_o} - 1 \qquad (2.46)$$

Ce reflux à la paroi a été vérifié qualitativement de manière expérimentale par Weinberg et al (40) en injectant un colorant par une seringue à diverses distances de la paroi. Lorsque le débit est nul, le colorant se déplace effectivement du côté opposé à l'onde s'il est injecté près de la paroi.

Piégage des particules fluides par l'onde

L'étude détaillée des trajectoires fait apparaître un autre phénomène curieux qui se produit dans certaines conditions. Il existe parfois dans le repère lié à l'onde des lignes de courant fermées formant une région de recirculation du fluide qui se déplace avec la vitesse de l'onde comme si elle était piégée par celle-ci (Figure 2.6).

Cette région est délimitée par une ligne de courant particulière qui intersecte l'axe. Les points d'intersection apparaissent dans le repère lié à l'onde comme des points d'arrêt.

Pour déterminer ces points, on égale à 1 la vitesse dans le repère fixe donnée par l'équation (2.17a). Il vient, pour $\eta = o$,

$$H = 3(1 - \bar{Q}_o) \qquad (2.47)$$

Pour que ces points d'arrêt existent, il faut et il suffit que le deuxième membre de (2.47) soit compris entre $1 + \phi$ et $1 - \phi$. Soit

$$1 - \phi < 3(1 - \bar{Q}_o) < (1 + \phi)$$

ou

$$\frac{2 - \phi}{3} < \bar{Q}_o < \frac{2 + \phi}{3} \qquad (2.48)$$

On vérifie facilement que la borne supérieure des inégalités (2.48) est supérieure à $\bar{Q}_{max}$. Donc, dans le régime de pompage, seule la borne inférieure subsiste.

La ligne de courant qui passe par les points d'arrêts correspond à $\hat{\chi} = o$ puisqu'elle intersecte l'axe. Son équation est donc, à l'aide de (2.14b)

$$\eta^2(\hat{\chi}=o) = H^2 \frac{[3\bar{Q}_o - 2 + \phi \sin \hat{\xi}]}{\bar{Q}_o + \phi \sin \hat{\xi}} \qquad (2.49)$$

Les lignes de courant dans cette zone de recirculation sont schématisées sur la figure 2.6.

Dans la limite d'occlusion complète $\phi = 1$, $\bar{Q}_{omax} = 1$ et les points d'arrêt se trouvent aux points d'occlusion du conduit. Dans ce cas (2.49) donne

$$\eta(\hat{\chi} = o) = H \qquad (2.50)$$

La limite de la zone de recirculation se confond avec la paroi. Tout le fluide effectue des trajectoires qui apparaissent fermées dans le repère lié à l'onde. Ces trajectoires sont représentées sur la figure 2.6. On montre aisément que le lieu des points tels que $\hat{u} = o$ est la ligne $\eta = H/\sqrt{3}$

Résumé graphique

Les différents régimes décrits précédemment peuvent être illustrés facilement dans un diagramme $\phi - \bar{Q}_{\bar{\theta}}$, qui sont les 2 paramètres du problème (Figure 2.7). On voit que le phénomène de piégage a lieu dans le régime de pompage lorsque le paramètre d'occlusion et le débit sont élevés. Il se produit aussi aux faibles valeurs de ϕ mais quand le gradient de pression est négatif. Le phénomène de reflux a lieu pen-

dant une grande partie du domaine de pompage et pendant le régime de débit négatif.

2. 3 TRANSPORT PERISTALTIQUE DANS UN CONDUIT DE REVOLUTION

Le cas d'un conduit de révolution est évidemment intéressant, car les conduits physiologiques sont en général de section circulaire. La méthode de calcul est la même que pour le cas de la géométrie plane. On montre aisément que pour les nombres de Reynolds nuls et les grandes longueurs d'onde les équations de mouvement se réduisent à :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = o\ (\alpha^2) \tag{2.52}$$

avec les conditions aux limites

. Au centre $r = o$, $\partial u/\partial r = o$ (2.53a)

. à la paroi, en supposant que son mouvement est purement transversal.

$$r = h \quad , \quad u = o \tag{2.53b}$$

On normalise les variables de la manière suivante

$$R = r/a \quad , \quad Q = q/\pi a^2 c \quad , \quad P = 2\pi a^2 p/(\lambda \mu c) \quad , \quad \xi = \frac{2\pi x}{\lambda} \tag{2.54}$$

A l'aide de ces variables sans dimensions, l'équation (2.51) s'écrit

$$\frac{dP}{d\xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R}\right) \tag{2.55}$$

En intégrant (2.55) par rapport à R avec l'aide des conditions aux limites (2.53), on obtient

$$U = \frac{R^2 - H^2}{4} \frac{dP}{d\xi} \tag{2.56}$$

On calcule alors le débit dans un repère fixe

$$Q = 2\int_0^1 UR\, dR = -\frac{H^4 \pi}{8} \frac{dP}{d\xi} \tag{2.57}$$

Le débit dans le repère lié à l'onde s'écrit

$$\hat{Q}(\tau) = Q - H^2 \tag{2.58}$$

De (2.57) et (2.58), on tire

$$\frac{dP}{d\xi} = -8\left[\frac{\hat{Q}(\tau)}{H^4} + \frac{1}{H^2}\right] \tag{2.59}$$

De la même manière que pour le cas d'une géométrie plane, l'équation (2.59) montre que si la différence de pression entre les deux extrémités ne varie **pas** avec le temps et si la longueur du conduit est un nombre entier de longueurs d'onde, le débit $\hat{Q}(\tau)$ dans le repère lié à l'onde ne dépend pas du temps et l'écoulement apparaît comme stationnaire dans ce repère. On se place dans ce cas pour la suite des calculs.

On choisit comme paramètre le débit moyen qui vaut :

$$\bar{Q} = \int_0^1 Q d\tau = \hat{Q} + 1 + \phi^2/2 \tag{2.60}$$

L'accroissement de pression par longueur d'onde (ou gradient de pression moyen) s'obtient en intégrant (2.59) par rapport à ξ

$$\Delta P_\lambda = \int_o^1 \frac{dP}{d\xi} d\xi = \frac{16\,\pi}{(1 - \phi^2)^{7/2}} \left[\phi^2 (4 - \phi^2/4) - (1 + \frac{3\phi^2}{2})\, \bar{Q} \right] \qquad (2.61)$$

De la même manière que dans le cas bidimensionnel, le débit moyen est une fonction linéaire du gradient de pression moyen. On peut écrire

$$\bar{Q} = \frac{\phi^2(16 - \phi^2)}{2(2 + 3\phi^2)} - \frac{(1 - \phi^2)^{7/2}}{16\,\pi}\, \Delta P_\lambda \qquad (2.62)$$

où

$$\bar{Q}_{max} = \frac{\phi^2(16 - \phi^2)}{2(2 + 3\phi^2)}$$

est la contribution des ondes péristaltiques en l'absence de gradient de pression moyen. Le gradient de pression moyen tel que le débit est nul est :

$$\Delta P_{\lambda max} = \frac{4\pi\phi^2(16 - \phi^2)}{(1 - \phi^2)^{7/2}} \qquad (2.63)$$

Comme dans le cas bidimensionnel, le domaine de pompage est défini par les conditions suivantes

$$o < \bar{Q} < \bar{Q}_{max}$$

ou

$$\Delta P_{\lambda max} > \Delta P_\lambda > o$$

Aux faibles valeurs de ϕ , $\bar{Q}_{max}$ et P_{max} sont d'ordre φ^2, soit respectivement

$$\bar{Q}_{max} \simeq 4\phi^2 \quad , \quad \Delta P_{\lambda max} \simeq 4\pi\phi^2$$

Dans la limite d'occlusion complète $\phi \to 1$

$$\Delta P_{\lambda max} \to \infty \qquad \text{et} \qquad \bar{Q}_{max} \to 3/2$$

Rendement Mécanique.

Le dénominateur de l'équation (2.28) en négligeant ici encore les forces de frottement est remplacé par

$$\bar{W} = -\frac{1}{T}\int_o^T \int_o^\lambda 2\pi h\, p\, \frac{\partial h}{\partial t}\, dX dt \qquad (2.64)$$

Tous calculs faits, on trouve, en définitive, avec l'aide de (2.28) et (2.64)

$$r = \frac{(\bar{Q}/\bar{Q}_{max})\,(1 - \bar{Q}/\bar{Q}_{max})}{A(\phi) - \bar{Q}/\bar{Q}_{max}}$$

avec

$$A(\phi) = \frac{4 + 6\phi^2}{\phi^4 (16-\phi^2)^2}\left[\, 4 + 4(1-\phi^2)^{7/2} + 10\phi^2 + 7\phi^4 + \frac{3}{2}\,\phi^6 \,\right]$$

Le rendement dans le cas d'une géométrie de révolution est également repré-

senté sur la Figure 2.3 par des courbes en pointillés. Il est inférieur pour une même valeur de ϕ à celui obtenu dans le cas bidimensionnel.

Profils de vitesse et détails des trajectoires

La vitesse longitudinale est donnée par (2.56) qui, avec l'aide de (2.59) et (2.60), s'écrit

$$U = 2 \frac{(\bar{Q} + H^2 - 1 - \phi^2/2)}{H^2} \left(1 - \frac{R^2}{H^2} \right) \tag{2.65}$$

La composante transversale de la vitesse s'obtient à partir de l'équation de continuité

$$\frac{\partial V}{\partial R} = - \alpha \frac{\partial U}{\partial \xi} \tag{2.66}$$

On trouve

$$V = \alpha \left[2 \hat{Q} - (1 + \frac{2}{H^2} \hat{Q}) R^2 \right] \frac{R \cos (\xi - \tau)}{H^3} \tag{2.67}$$

Dans une géométrie de révolution, la fonction de courant χ est définie par

$$d\chi = 2UR \, dR - \frac{2RV}{\alpha} d\xi \tag{2.68}$$

Avec l'aide de (2.65) et (2.67) on trouve après intégration

$$\chi = \left(\frac{\hat{Q}}{H^2} + 1\right)\left(2R^2 - \frac{R^4}{H^2}\right) \tag{2.69}$$

La fonction de courant dans le repère lié à l'onde est simplement

$$\hat{\chi} = \chi - R^2 = \frac{\hat{Q}}{H^2}\left(2R^2 - \frac{R^2}{H^2}\right) + R^2 - \frac{R^4}{H^4} \tag{2.70}$$

Critère de reflux à la paroi

En procédant de la même manière que pour le cas bidimensionnel et en effectuant un développement limité du débit Q_χ au voisinage de la paroi, on trouve que le critère de reflux est

$$\bar{Q} < \bar{Q}_{max} \tag{2.71}$$

ce qui signifie que le reflux a lieu dans la totalité du régime de pompage. De la même manière la fraction de débit rétrograde dans la limite $\phi << 1$ est donnée par

$$R^* = \frac{1 + 2\,(\bar{Q}/\bar{Q}_{max})^2}{27\,\bar{Q}/\bar{Q}_{max}}\left(4 - \frac{\bar{Q}}{\bar{Q}_{max}}\right) - 1 \tag{2.72}$$

Critère de piégage

Pour cela, on recherche les points d'arrêts sur l'axe dans un repère lié à l'onde

$$\hat{U} = 2(\bar{Q} + H^2 - 1 - \phi^2/2)\,H^2 - 1 = 0 \tag{2.73}$$

Pour que ces points d'arrêt soient réels, il faut et il suffit que

$$\frac{1}{2} - \phi \quad < \quad \bar{Q} \quad < \quad \frac{1}{2} + \phi \tag{2.74}$$

La limite supérieure est située en dehors du régime de pompage

Dans le repère lié à l'onde la frontière de la zone de recirculation est la ligne de courant $\hat{\chi} = o$, son équation est donc :

$$R^2 = H^2\left[\frac{2\hat{Q} + H^2}{\hat{Q} + H^2}\right] \tag{2.75}$$

Dans la limite de l'occlusion complète, $\hat{Q} \to o$ et $R \to \pm H$. La zone de recirculation comprend alors tout le volume du conduit.

Résumé graphique

De la même manière que dans le cas bidimensionnel plan on peut représenter les différents régimes d'écoulements dans un diagramme $\phi - \bar{Q}$ (Figure 2.8). Ce diagramme ne diffère pas de manière fondamentale de celui du cas plan. Toutefois le domaine le piégage est beaucoup plus étendu, et le reflux se produit durant tout le domaine de pompage.

2. 4 SUPERPOSITION D'ONDES TRANSVERSES ET LONGITUDINALES

On sait que certains conduits glandulaires, notamment le ductus efferentes sont garnis de cils qui battent en synchronisation. On peut assimiler le mouvement de l'extrémité de ces cils à une onde progressive de type péristaltique agissant à la fois dans le sens transversal et le sens longitudinal. L'uretère semble possèder également des ondes de dilatation et de

contractions longitudinales. Les conditions aux limites à la paroi sont alors différentes du cas traité précédemment. L'onde transverse détermine la forme de la paroi.

$$H = 1 + \phi_1 \sin(\xi - \tau) \tag{2.76}$$

mais l'onde longitudinale produit un déplacement à partir de la position d'équilibre

$$\Delta\xi = \phi_2 \sin(\xi - \tau + f) \tag{2.77}$$

où f désigne la différence de phase des deux ondes.

La condition aux limites à la paroi (2.6c) est remplacée par

$$\chi_{o\eta} = \frac{\partial}{\partial t} \Delta\xi = -\phi_2 \cos(\xi - \tau + f) \tag{2.78}$$

Le champ de vitesse dans le repère lié à l'onde s'écrit alors, dans le cas bidimensionnel

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi} (\eta^2 - H^2) - 1 - \phi_2 \cos(\hat{\xi} + f) \tag{2.79}$$

En intégrant (2.79) sur la section, on obtient le débit dans ce repère

$$\hat{Q} = -\frac{H^3}{3} \frac{dP}{d\xi} - H \left[1 + \phi_2 \cos(\hat{\xi} + f)\right] = \bar{Q} - 1 \tag{2.80}$$

En tirant le gradient de pression de (2.80) et en intégrant sur une

longueur d'onde, on obtient

$$\Delta P_\lambda = -3(\bar{Q}-1)\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{H^3} - 3\int_0^{2\pi}\frac{d\xi}{H^2} - 3\phi_2\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\xi+f)}{H^2}d\xi$$

soit encore

$$\Delta P_\lambda = \frac{3\pi\phi_1^2}{(1-\phi_1^2)^{5/2}}\left[3 - \frac{2+\phi_1^2}{\phi_1^2}\bar{Q} + \frac{2\phi_2}{\phi_1}(1-\phi_1^2)\sin f\right] \qquad (2.81)$$

L'équation (2.81) montre que la contribution des ondes longitudinales au pompage est maximum si sin f = 1, c'est-à-dire si elles sont en avance de 90° sur les ondes transversales. Dans ce cas, les mouvements longitudinaux sont nuls aux sommets et aux creux de l'onde transversale et sont maximums quand la section du conduit est égale à sa valeur moyenne. Plus précisémment la paroi s'allonge dans la direction longitudinale en même temps qu'elle se dilate transversalement et vice versa.

Le débit maximum pour un gradient de pression moyen nul est

$$\bar{Q}_{max} = \frac{3\phi_1^2}{2+\phi_1^2} + 2\phi_1\phi_2\frac{(1-\phi_1^2)}{2+\phi_1^2}\sin f \qquad (2.82)$$

Pour f = 90°, l'accroissement de débit maximum dû à l'action des ondes longitudinales est en pourcentage

$$\frac{\Delta\bar{Q}_{max}}{\bar{Q}_{omax}} = \frac{2}{3}\frac{\phi_2}{\phi_1}(1-\phi_1^2) \qquad (2.83)$$

Il est représenté sur la figure 2.9

III - EFFETS D'INERTIE ET DES LONGUEURS D'ONDE FINIES SUR LE POMPAGE PÉRISTALTIQUE

Lorsque les effets d'inertie ne sont plus complètement négligeables mais restent modérés et lorsque la longueur d'onde est assez grande mais finie, on peut étudier les modifications apportées à la solution d'ordre zéro, pour $R_e = \alpha = 0$, à partir du système d'équations (2.3), (2.5). Comme nous avons vu que les résultats obtenus pour un conduit de révolution ne diffèrent pas qualitativement de ceux obtenus pour un conduit bidimensionnel, nous nous limiterons dans cette section à ce dernier cas.

Nous nous placerons également dans le cas où les petits paramètres α et R_e sont du même ordre de grandeur. On verra que, bien que l'équation (1.4) ne soit pas linéaire, les contributions des termes en α et R_e peuvent être additionnées jusqu'au 2ème ordre.

Zien et Ostrach (46) ont résolu l'équation (1.4) à l'aide d'un développement limité suivant les puissances de α, en supposant que le rapport ac/ν qu'ils choisissent comme nombre de Reynolds reste d'ordre 1 au plus. L'examen de l'équation (1.4) révèle que les termes d'ordre α dans la solution de Zien et Ostrach correspondent en réalité à des contributions d'effets d'inertie plutôt que des longueurs d'onde finies, tandis que les termes d'ordre α^2 comprennent à la fois les effets d'inertie et de longueurs d'onde finies. En outre leur solution n'est donnée explicitement que pour la limite $\phi \ll 1$ et pour un débit moyen nul. La solution présentée ici est donc plus générale que celle de Zien et Ostrach tout en lui étant antérieure.

3. 1 CONTRIBUTION DES EFFETS DE COURBURE DE LA PAROI POUR $R_e = 0$

Lorsque le nombre d'onde α n'est plus négligeable devant 1 et que le paramètre d'occlusion ϕ n'est pas très petit, la courbure de la paroi et par conséquent des lignes de courant, n'est plus négligeable et la solution présentée au chapitre précédent se trouve modifiée par ces effets. Dans ce chapitre on désigne-

ra par "effets de courbure" la contribution des termes d'ordre α^2. Comme α n'intervient que par son carré dans les équations (1.9), (1.10), il n'y a pas de termes d'ordre α. Cette contribution est régie par l'équation (2.5) que nous répétons ici :

$$\chi_{2\eta\eta\eta\eta} = -2\chi_{o\eta\eta\eta\eta} \tag{3.1}$$

où χ_o est la solution pour $R_e = \alpha = 0$ décrite dans le 2ème chapitre, et par les conditions aux limites (2.6) et (2.7). On remarque que pour les termes d'ordre supérieur à zéro, la fonction de courant a la même expression dans le repère fixe et dans le repère lié à l'onde.
La solution de l'équation (3.1) s'écrit :

$$\tilde{\chi}_2 = \frac{A_1(\xi)}{4}\left(\frac{\delta^5}{5} - \delta\right) - \frac{3}{2}\left(\tilde{Q}_2 + \frac{A_1(\xi)}{5}\right)\left(\frac{\delta^3}{3} - \delta\right) \tag{3.2}$$

avec

$$A_1(\xi) = -HH_{\xi\xi}\,(3\hat{Q}_o + 2H) + 6H_\xi^2\,(H + 2\hat{Q}_o) \tag{3.3}$$

où H_ξ désigne $\delta H/\delta\xi$ etc...

Ce terme $\tilde{\chi}_2$ est à ajouter au terme χ_o de l'équation (2.14a) pour obtenir la solution complète à l'ordre 2.

De la même manière que pour la fonction de courant, on peut développer le gradient de pression suivant les puissances de α^2 :

$$P_\xi = P_{o\xi} + \alpha^2\tilde{P}_{2\xi} + \ldots\ldots \tag{3.4}$$

En substituant le développement (3.4) dans l'équation (1.2) on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{2\xi} &= \chi_{o\eta\xi\xi} + \tilde{\chi}_{2\eta\eta\eta} \\ &= \frac{3}{2}\frac{H_{\xi\xi}}{H^2}\left[(\delta^2+1)\hat{Q}_o + 2H\right] - \frac{3H_\xi^2}{H^3}\left[H+(2\delta^2+1)\hat{Q}_o\right] \\ &\quad + \frac{3}{H^3}\left[A_1\delta^2 - \hat{Q}_2 - A_1/5\right]\end{aligned} \tag{3.5}$$

Le gradient de pression est une fonction périodique de ξ. Donc les accroissements de pression entre des points situés à la même distance η de l'axe et séparés par une longueur d'onde λ, sont les mêmes. Comme l'on se place dans le cas où l'écoulement a lieu entre deux réservoirs distants d'un nombre entier de longueurs d'onde, il s'ensuit que l'accroissement de pression par longueur d'onde dans la direction longitudinale est indépendant de η et peut être évalué sur l'axe, à $\eta = 0$. On a , à l'aide de (3.2) et (3.5)

$$\tilde{P}_{2\xi}\ (\eta=o) = -\frac{3\hat{Q}_2}{H^3} + \frac{21}{10}\frac{H_{\xi\xi}}{42}(2H+\hat{Q}_o) - \frac{3}{5}\frac{H_\xi^2}{H^3}(11H+17\hat{Q}_o) \tag{3.6}$$

La contribution des effets de courbure au gradient moyen de pression s'obtient par intégration de (3.6).

$$\Delta\tilde{P}_{2\lambda} = \int_o^{2\pi} P_{2\xi}\,d\xi = \frac{6\pi}{5}\left[4 + \frac{4(\phi^2-1) - 3\hat{Q}_o\phi^2}{(1-\phi^2)^{3/2}}\right] - 9\hat{Q}_2\frac{\pi(2+\phi^2)}{(1-\phi^2)^{5/2}} \tag{3.7}$$

Ainsi l'accroissement de pression total, à l'ordre α^2 peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{P}_\lambda^{(2)} &= \Delta P_{o\lambda} + \alpha^2\Delta\tilde{P}_{2\lambda} \\ &= 3\pi\phi^2\left[3 - (2+\phi^2)\,\bar{Q}^{(2)}/\phi^2\right](1-\phi^2)^{-5/2} \\ &\quad + \frac{6\pi\alpha^2}{5}\left[4 + \frac{7\phi^2 - 4 - 3\bar{Q}_o\phi^2}{(1-\phi^2)^{3/2}}\right]\end{aligned} \tag{3.8}$$

où $\bar{Q}^{(2)} = \bar{Q}_o + \alpha^2 \bar{Q}_2$ désigne le débit moyen à l'ordre α^2. On peut également remplacer $\bar{Q}_o$ par $\bar{Q}^{(2)}$ dans l'équation (3.8) sans changer la validité à l'ordre α^2 car l'erreur introduite est d'ordre α^4. On vérifie que la contribution des effets de courbure en α^2 ne modifie pas la linéarité de la relation pression-débit, caractéristique des écoulements sans inertie. En outre, la contribution des effets de courbure disparaît dans la limite d'occlusion complète.
Le débit moyen maximum correspondant à $\Delta\tilde{P}_\lambda^{(2)} = 0$ est :

$$\bar{Q}_{max}^{(2)} = \frac{15\phi^2 + 2\alpha^2\left[4(1-\phi^2)^{5/2} + (7\phi^2-H)\ (1-\phi^2)\right]}{5(2+\phi^2) + 6\alpha^2\phi^2(1-\phi^2)} \qquad (3.9)$$

Dans la limite des faibles rapports d'amplitude $\phi << 1$, l'équation (3.9) se réduit à :

$$\bar{Q}_{max}^{(2)} \simeq (3/2)\ \phi^2\ (1 + 2\alpha^2/15) \qquad (3.10)$$

où

$$\frac{\bar{Q}^{(2)}}{\bar{Q}_{omax}} = 1 + \frac{2\alpha^2}{15} \qquad (3.11)$$

La comparaison du résultat de l'équation (3.10) avec la solution exacte de Burns and Parkes (8), valable dans la limite $\phi << 1$, est illustrée sur la figure (3.1). On voit que la solution d'ordre α^2 est très proche de la solution exacte pour $\alpha = 1$, mais s'en écarte pour $\alpha = 2$. D'autre part on constate que les effets de courbure augmentent le débit moyen sauf dans la limite d'occlusion complète où leur contribution est nulle. L'accroissement de pression maximum par longueur d'onde correspondant à $\bar{Q}^{(2)} = 0$ s'écrit :

$$\Delta P^{(2)}_{\lambda max} = \frac{9\pi\phi^2}{(1-\phi^2)^{5/2}} + \frac{6\,\pi\alpha^2}{5}\left[4 + \frac{7\phi^2 - 4}{(1-\phi^2)^{3/2}}\right] \qquad (3.12)$$

Pour la limite $\phi << 1$ on obtient :

$$\frac{\Delta P^{(2)}_{\lambda max}}{\Delta P^{(o)}_{max}} = 1 + \frac{2\alpha^2}{15} \qquad (3.13)$$

c'est-à-dire le même rapport que celui des débits dans l'équation (3.11).

La contribution des effets de courbure du gradient moyen de pression pour un débit nul, est indiquée sur la figure (3.2). Cette contribution pour les autres valeurs du débit est représentée sur la figure (3.3).

3. 2 CONTRIBUTION DES EFFETS D'INERTIE

Nous répétons ici les équations (2.3) et (2.4) qui régissent les termes d'ordre R_e et R_e^2 pour la fonction de courant dans le repère lié à l'onde.

$$\hat{\chi}_{\eta\eta\eta\eta} = \hat{\chi}_{o\eta}\hat{\chi}_{o\xi\eta\eta} - \hat{\chi}_{o\xi}\hat{\chi}_{o\eta\eta\eta} \qquad (3.14)$$

$$\hat{\chi}_{2\eta\eta\eta\eta} = \hat{\chi}_{o\eta}\hat{\chi}_{1\xi\eta\eta} + \hat{\chi}_{1\eta}\hat{\chi}_{o\xi\eta\eta} - \hat{\chi}_{o\xi}\hat{\chi}_{1\eta\eta\eta} - \hat{\chi}_{\xi}\hat{\chi}_{o\eta\eta\eta} \qquad (3.15)$$

On verra par la suite qu'il est important de considérer aussi les termes d'ordre R_e^2 car les termes d'ordre R_e n'ont pas d'effets sur certaines caractéristiques de l'écoulement. Les solutions des équations (3.14) et (3.15), satisfaisant aux conditions aux limites (2.6), (2.8) s'écrivent respectivement :

$$\hat{\chi}_1 = b_1\left(\frac{\delta^7}{7} - \delta\right) + b_2\left(\frac{\delta^5}{5} - \delta\right) + b_3\left(\frac{\delta^3}{3} - \delta\right) \qquad (3.16)$$

avec

$$b_1 = -\frac{H_\xi}{40}(\hat{Q}_o + H)(2H + 3\hat{Q}_o) \tag{3.17a}$$

$$b_2 = \frac{H_\xi}{8}(3\hat{Q}_o^2 + 3\hat{Q}_o H + H^2) \tag{3.17b}$$

$$b_3 = -\frac{3H_\xi}{280}(33\hat{Q}_o^2 + 27\hat{Q}_o H + 8H^2) - \frac{3}{2}\hat{Q}_1 \tag{3.17c}$$

et

$$\hat{\chi}_2 = \frac{C_{11}}{720}\left(\frac{\delta^{11}}{11} - \delta\right) + \frac{C_{12}}{336}\left(\frac{\delta^9}{9} - \delta\right) + \frac{C_{13}}{120}\left(\frac{\delta^7}{7} - \delta\right) + \frac{C_{14}}{24}\left(\frac{\delta^5}{5} - \delta\right) + C_{15}\left(\frac{\delta^3}{3} - \delta\right) \tag{3.18}$$

$$C_{11} = 40a_{11}b_{o1} - 24a_{o1}b_1 \tag{3.19a}$$

$$C_{12} = 42a_{11}b_{o2} + 18a_{12}b_{o1} - 30b_1a_{o2} - 6a_{o1}b_2 \tag{3.19b}$$

avec $$C_{13} = 20a_{12}b_{o2} + 4a_{13}b_{o1} - 12b_2a_{o2} + 4a_{o1}b_3 \tag{3.19c}$$

$$C_{14} = 6a_{13}b_{o2} - 2b_{o1}a_{14} - 6a_{o1}(b_1+b_2) - 2b_3(a_{o2}+3a_{o1}) \tag{3.19d}$$

$$C_{15} = -3\left(\hat{Q}_2 + \frac{C_{11}}{792} + \frac{C_{12}}{378} + \frac{C_{13}}{140} + \frac{C_{14}}{30}\right) \tag{3.19e}$$

et $$a_{o1} = \frac{H_\xi}{3}(3\hat{Q}_o + 2H) \qquad a_{o2} = -\frac{3}{2}\hat{Q}_o H_\xi$$

$$a_{11} = -\frac{H_\xi b_1}{H} + \frac{b_{1\xi}}{7} \qquad a_{12} = -\frac{H_\xi b_2}{H} + \frac{b_{2\xi}}{5}$$

$$a_{13} = -\frac{H_\xi b_3}{H} + \frac{b_{3\xi}}{7} \qquad a_{14} = \frac{H_\xi}{H}(b_1 + b_2 + b_3) - (b_{1\xi} + b_{2\xi} + b_{3\xi})$$

$$b_{o1} = -\frac{3}{2} H(\hat{Q}_o + H) \qquad b_{o2} = \frac{H}{2} (3\hat{Q}_o + H)$$

Le gradient longitudinal de pression est également développé suivant les puissances croissantes du nombre de Reynolds, pour $\alpha = 0$.

$$P_\xi = P_{o\xi} + R_e P_{1\xi} + R_e^2 P_{2\xi} + \ldots\ldots \tag{3.20}$$

En substituant l'équation (3.20) dans (1.9) et en identifiant les coefficients des puissances de R_e, on obtient successivement :

$$P_{1\xi} = \hat{\chi}_{1\eta\eta\eta} + \hat{\chi}_{o\xi}\hat{\chi}_{o\eta\eta\eta} - \hat{\chi}_{o\eta}\hat{\chi}_{o\eta\xi} \tag{3.21}$$

$$P_{2\xi} = \hat{\chi}_{2\eta\eta\eta} + \hat{\chi}_{o\xi}\hat{\chi}_{1\eta\eta} + \hat{\chi}_{1\xi}\hat{\chi}_{o\eta\eta} + \hat{\chi}_{1\eta}\hat{\chi}_{o\eta\xi} - \hat{\chi}_{o\eta}\hat{\chi}_{1\eta\xi} \tag{3.22}$$

Puisque α est supposé nul, la courbure des lignes de courant est nulle et la pression est uniforme sur une section transversale du conduit. Il résulte que le gradient moyen de pression peut être évalué sur l'axe du conduit, pour $\eta = 0$. La contribution des termes d'inertie d'ordre R_e devient :

$$\Delta P_{\lambda 1} = \int_o^{2\pi} P_{1\xi} d\xi = -\frac{3\pi\phi^2\hat{Q}_1(2 + \phi^2)}{(1 - \phi^2)^{5/2}} \tag{3.23}$$

A l'ordre R_e, la relation pression-débit s'écrit donc :

$$\Delta P_\lambda^{(1)} = \Delta P_{\lambda o} + R_e \Delta P_{\lambda 1}$$

$$= \frac{3\pi\phi^2}{(1-\phi^2)^{5/2}} \left(3 - \frac{2+\phi^2}{\phi^2} \bar{Q}^{(1)} \right) \qquad (3.24)$$

où $\bar{Q}^{(1)} = \bar{Q}_o + R_e \hat{Q}_1$ est le débit moyen à l'ordre R_e. La comparaison de l'équation (3.24) avec (2.21), montre que la relation pression-débit pour $R_e = 0$ n'est pas modifiée par les termes d'ordre R_e. Il est donc nécessaire de considérer également les termes d'ordre R_e^2. Avec l'aide de (3.18) et (3.22), la contribution de ces termes au gradient de pression moyen s'écrit :

$$\Delta P_{\lambda 2} = \int_o^2 P_{2\xi} d\xi = 2\pi \left[a_1 + a_2 \hat{Q}_o + a_3 \hat{Q}_o^2 + a_4 \hat{Q}_o^3 - 2\hat{Q}_2 \frac{(2+\phi^2)}{(1-\phi^2)^{5/2}} \right] \qquad (3.25)$$

avec $a_1 = 0{,}00244\ \phi^2$ $\qquad a_2 = -0{,}0228 \left[1 - (1-\phi^2)^{1/2} \right]$

$a_3 = -0{,}00430 \left[(1-\phi^2)^{-1/2} \right]$ $\qquad a_4 = -0{,}01155\ \phi^2 (1-\phi^2)^{-3/2}$

En utilisant (2.21) et en regroupant les termes, le gradient de pression moyen à l'ordre R_e^2 s'écrit :

$$\Delta P_\lambda^{(2)} = \Delta P_{\lambda o} + R_e \Delta P_{\lambda 1} + R_e^2 \Delta P_{\lambda 2}$$

$$= \frac{3\pi\phi^2}{(1-\phi^2)^{5/2}} \left[3 - \frac{2+\phi^2}{2} \bar{Q}^{(2)} \right] \qquad (3.26)$$

$$+ 2\pi R_e^2 \left[a_1 + a_2(\bar{Q}_o - 1) + a_3(\bar{Q}_o - 1)^2 + a_4(\bar{Q}_o - 1)^3 \right]$$

avec

$$\bar{Q}^{(2)} = \bar{Q}_o + R_e \hat{Q}_1 + R_e^2 \hat{Q}_2$$

On peut remplacer $\overline{Q}_o$ par $\overline{Q}^{(2)}$ dans l'équation (3.26) puisque l'erreur commise est d'ordre R_e^2 . On constate que, à cause des effets d'inertie, le gradient de pression moyen n'est plus une fonction linéaire mais une fonction cubique du débit moyen. La contribution des termes d'inertie ΔP_{λ_2}, normalisée par rapport au terme d'ordre zéro $\Delta P_{\lambda o}$ est représentée sur la figure (3.4). Cette contribution est toujours négative lorsque $\phi \lesssim 0{,}4$ et devient positive aux grandes valeurs de ϕ au moins pour les faibles débits. Il s'ensuit que l'inertie contribue positivement au pompage aux faibles débits et aux degrés d'occlusion élevés, tandis que le contraire se produit pour les faibles valeurs de ϕ . Quand $\overline{Q}^{(2)} = \overline{Q}_{max}$, $\Delta P_{\lambda o} = 0$ et les courbes ont une asymptote verticale. Le gradient de pression moyen maximum du régime de pompage s'obtient lorsque $\overline{Q}^{(2)} = 0$. On trouve :

$$\Delta P^{(2)}_{\lambda max} = \frac{9\pi\phi^2}{(1-\phi^2)^{5/2}} + 2\pi R_e^2 (a_1 - a_2 + a_3 - a_4) \qquad (3.27)$$

Dans la limite des faibles valeurs de ϕ, l'équation (3.26) peut être développée en série pour donner une relation linéaire entre $\Delta P_\lambda^{(2)}$ et $\overline{Q}^{(2)}$

$$\bar{Q}^{(2)} \cong -\frac{\Delta P_\lambda^{(2)}}{6\pi} + \frac{3}{2}\phi^2 (1 - 2{,}12 \times 10^{-4} R_e^2) \qquad (3.28)$$

On montre à partir de la solution de Fung et Yih (15) que cette relation linéaire est conservée à tous les nombres de Reynolds avec le même coefficient $-1/6\pi$. Le débit moyen maximum dans ce cas (correspondant à $\Delta P_\lambda^{(2)} = 0$) vaut :

$$\bar{Q}^{(2)} = 3\phi^2 (1 - 2{,}1 \times 10^{-4} R_e^2) / 2 \qquad (3.29)$$

Cette expression est identique à celle donnée par Hanin (17) dans la limite des faibles nombres de Reynolds. Ces comparaisons permettent de vérifier l'exactitude des calculs.

Il est également intéressant de comparer la solution pour un gradient de pression moyen nul, donnée par Hanin, valable pour $\phi << 1$ mais pour un nombre de Reynolds arbitraire, avec l'équation (3.14), valable pour les faibles nombres de Reynolds. La figure (3.5) montre que notre solution est très proche de la solution exacte jusqu'à $R_e = 10$. A la limite $R_e \to \infty$, la réduction sur le débit due aux effets d'inertie n'est que de 17%.

Une vérification expérimentale de l'équation (3.22) a été effectuée par Eckstein (13) pour un débit nul (figure 3.6) à l'aide de l'appareillage décrit dans le chapitre II. Ces résultats expérimentaux montrent que le gradient de pression moyen pour un débit nul, est indépendant du nombre de Reynolds jusqu'à $R_e = 7$. Ce gradient de pression augmente paraboliquement avec R_e, ainsi que le prédit la théorie du 2ème ordre, jusqu'à $R_e = 60$ environ. L'accord entre la théorie et les points expérimentaux est encore amélioré lorsque la théorie bidimensionnelle est modifiée pour tenir compte des effets tridimensionnels présents dans l'appareillage. Cette comparaison permet de conclure que, en ce qui concerne les caractéristiques principales du pompage, le domaine de validité des solutions d'ordre zéro et deux est plus étendu que l'on pouvait le supposer à priori.

3. 5 ETUDE DETAILLEE DES TRAJECTOIRES DES PARTICULES FLUIDES

Distribution des vitesses

La composante longitudinale de la vitesse s'obtient en dérivant par rapport à η la fonction de courant donnée par les équations (2.14), (3.2) et (3.16). Dans cette section, on considère ensemble les effets de courbure et d'inertie qui s'ajoutent linéairement jusqu'au 2ème ordre. Le résultat s'écrit :

$$U = -3\frac{(\hat{Q}^{(2)}+H)}{2H}(\delta^2-1) + \frac{\alpha^2 A_1}{20H}(\delta^2-1)(5\delta^2-1) + (R_e/H)\left[b_1(\delta^6-1)\right.$$
$$\left. + b_2(\delta^4-1) + b_3'(\delta^2-1)\right] + (R_e^2/H)\left[\frac{C_{11}}{720}(\delta^{10}-1) + \frac{C_{12}}{336}(\delta^8-1)\right. \qquad (3.30)$$
$$\left. + \frac{C_{13}}{120}(\delta^4-1) + C_{15}(\delta^2-1)\right]$$

avec

$$b'_3 = -(3/280)H_\xi \ (33\hat{Q}_o^2 + 27\ Q_o^2 H + 8H^2) \qquad (3.31)$$

On vérifie, à partir des équations (3.30) et (3.31), que la contribution d'ordre R_e à la vitesse longitudinale est proportionnelle à H_ξ donc antisymétrique par rapport aux sommets de l'onde. Cette contribution s'annule lorsqu'elle est moyennée sur une longueur d'onde. C'est la raison pour laquelle le débit et le gradient de pression moyens sont indépendants des termes d'ordre R_e. La contribution des termes en α^2 à la vitesse longitudinale change de signe pour $\delta = 1/\sqrt{5}$. La vitesse est augmentée par les effets de courbure au voisinage de l'axe et diminuée près de la paroi. On peut donc s'attendre à ce que la possibilité de reflux près de la paroi soit augmentée. Les profils de vitesse maximum pour $R_e = 0$ et $\alpha = 0{,}2$ sont représentés sur la figure (3.7) pour $\overline{Q} = 0$ et $\overline{Q} = Q_{max}$.

Vitesse sur l'axe

En faisant $\delta = 0$ dans l'équation (3.30) on obtient :

$$U = +\frac{3}{2}\left(\frac{\hat{Q}}{H} + 1\right) + \frac{\alpha^2 A_1}{20H} - \frac{R_e}{H}\left[b_1 + b_2 + b_3\right]$$
$$- \frac{R_e^2}{H}\left[\frac{C_{11}}{720} + \frac{C_{12}}{336} + \frac{C_{13}}{120} + \frac{C_{14}}{24} + C_{15}\right] \qquad (3.32)$$

soit

$$U = \frac{3}{2}\left(\frac{\hat{Q}}{H} + 1\right) - \frac{\alpha^2}{20}\left[H_{\xi\xi}\,(3\hat{Q}_o + 2H) - 6H_\xi^2\,(1 + \frac{2\hat{Q}_o}{H})\right]$$
$$+ R_e H_\xi\left[\frac{3}{56}\,\frac{\hat{Q}_o^2}{H} + \frac{11}{280}\,\hat{Q}_o + \frac{3}{280}\,H\right] \qquad (3.33)$$
$$- \frac{R_e^2}{H}\left[\frac{C_{11}}{720} + \frac{C_{12}}{336} + \frac{C_{13}}{120} + \frac{C_{14}}{24} + C_{15}\right]$$

Critère de reflux

On procède de la même manière qu'au chapitre II en développant l'équation d'une ligne de courant au voisinage de la paroi sous la forme

$$\delta_\chi = 1 + a_1(\xi)\varepsilon + a_2(\xi)\,\varepsilon^2 + \ldots\ldots \qquad (3.35)$$

avec $\varepsilon = \chi - \chi_{paroi}$

Le débit moyen dans un repère stationnaire limité par la ligne de courant χ est :

$$\bar{Q}_\chi = \chi + \overline{h\delta_\chi} = \bar{Q} + \bar{\varepsilon} + \overline{a_1 h\varepsilon} + \overline{a_2 h\varepsilon^2} \qquad (3.36)$$

où $\overline{a_1 h}$ désigne la valeur moyennée sur une période de $a_1 h$, etc...
Les coefficients a_1 et a_2 sont calculés en égalant les coefficients des puissances successives de ε dans l'équation (3.36). A l'aide des équations (3.2), (3.16) et (3.18), on trouve que $\overline{a_1 h} = -1$ et il résulte que le critère de reflux est simplement :

$$\overline{a_2 h} > 0 \qquad (3.37)$$

La condition limite $\overline{a_1 h} = 0$ s'écrit

a) si l'on ne considère que les effets de courbure

$$\bar{Q}^{(2)} = \frac{\phi^2 + 3\alpha^2(1-\phi^2)\left[1-(1-\phi^2)^{1/2}\right]\left[3-2(1-\phi^2)^{1/2}\right]/5}{1 + 9\alpha^2(1-\phi^2)\left[1-(1-\phi^2)^{1/2}\right]/5} \qquad (3.38)$$

Pour $\phi << 1$, l'équation (3.38) se réduit à

$$\bar{Q}^{(2)} \simeq \phi^2(1 + 0{,}3\alpha^2) \qquad (3.39)$$

b) si l'on ne considère que les effets d'inertie, pour $\alpha = 0$

$$\frac{\bar{Q}^{(2)} - \phi^2}{(1-\phi^2)^{3/2}} + R_e^2 \left\{ \phi^2\left[0{,}00423\,\bar{Q}^{(2)} - 0{,}0104\right] \right.$$

$$+ 0{,}0445\,(1 - \sqrt{1-\phi^2})\,(\bar{Q}^{(2)} - 1)^2 \qquad (3.40)$$

$$\left. + 0{,}0526\left[(1-\phi^2)^{-1/2} - 1\right]\,(\bar{Q}^{(2)} - 1)^3 \right\} = 0$$

On constate là encore que les termes d'ordre R_e n'interviennent pas dans le calcul du critère de reflux. Pour les faibles valeurs de ϕ l'équation (3.40) se réduit à

$$\bar{Q}^{(2)} = \phi^2\left[1 + 0{,}01410\,R_e^2\right] \qquad (3.41)$$

Critère de Piégeage

Comme dans le cas de la solution $R_e = \alpha = 0$, on recherche l'existence de

points d'arrêt sur l'axe dans le repère lié à l'onde. En égalant U à - 1, dans l'équation (3.32) on trouve :

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\hat{Q}^{(2)}}{H} + 1\right) + \frac{\alpha^2 A_1}{20H} - \frac{R_e}{H}(b_1 + b_2 + b_3') + R_e^2(H - 1)\left[g_3\hat{Q}^{(2)3} \right.$$

$$\left. + g_2\hat{Q}^{(2)2}H + g_1\hat{Q}^{(2)}H^2 + g_oH^3\right] = 1 \qquad (3.42)$$

avec

$g_o = 0{,}000670$ $\qquad$ $g_1 = 0{,}007547$

$g_2 = 0{,}02155$ $\qquad$ $g_3 = 0{,}02562$

Les points d'arrêt sont réels si les racines ξ^* de l'équation (3.42) satisfont à l'inégalité

$$(\sin\xi^*) < 1$$

soit

$$1 - \phi \leq H \leq 1 + \phi \qquad (3.43)$$

Les valeurs de $\overline{Q}^{(2)}$ correspondant aux cas limites $H = 1 \pm \phi$ sont les racines de l'équation :

$$\frac{3(\hat{Q}^{(2)} + 1 \pm \phi)}{2(1 \pm \phi)} - 1 + \frac{\alpha^2\phi}{20}\left[3\hat{Q}^{(2)} + 2 \pm 2\phi\right]$$

$$\pm R_e^2\phi\left[g_3\hat{Q}^{(2)3} + g_2\hat{Q}^{(2)2}(1 \pm \phi)\right. \qquad (3.44)$$

$$\left. + g_1\hat{Q}^{(2)}(1 \pm \phi)^2 + g_o(1 \pm \phi)^3\right] = o$$

Seules les racines correspondant à $H = 1 + \phi$ sont situées dans le domaine de pompage $0 < \bar{Q} < \bar{Q}^{(2)}_{max}$. Si l'écoulement est sans inertie et si l'on ne considère que les termes en α^2, l'équation (3.44) devient linéaire en $\bar{Q}^{(2)}$ et s'écrit :

$$\bar{Q}^{(2)} = \hat{Q}^{(2)} + 1 = \frac{\left[10(2 - \phi) + \alpha^2\phi(1 + \phi)\ (1 - 2\phi)\right]}{3\left[10 + \alpha^2\phi\ (1 + \phi)\right]} \qquad (3.45)$$

Résumé graphique

La figure (3.8) représente les régimes de piégeage et de reflux pour $R_e = 0$ et pour différentes valeurs de α. On a ici normalisé le débit par rapport à sa valeur quand le gradient de pression moyen est nul. Le domaine correspondant au piégeage augmente avec les effets de courbure. Il en est de même du domaine de reflux, excepté pour $\phi > 0{,}75$. Ceci n'est pas surprenant car les effets de courbure diminuent la vitesse longitudinale près de la paroi. Les effets d'inertie (figure 3.9), augmentent aussi le domaine de reflux tandis qu'ils diminuent celui du piégeage.

Conclusion

La conclusion majeure de cette analyse est le surprenant domaine de validité de la solution sans effets d'inertie ($R_e = 0$) qui reste valable jusqu'à $R_e = 10$ pour les grandes valeurs de ϕ et les faibles débits, et jusqu'à $R_e = 3$ aux faibles valeurs de ϕ pour la relation pression-débit. Par contre l'effet des termes d'inertie se fait sentir plus tôt en ce qui concerne les détails des trajectoires des particules fluides et le champ des vitesses ainsi qu'on peut le voir sur les figures (3.8) et (3.9).

Les effets de courbure deviennent importants lorsque α dépasse 1, c'est-à-dire lorsque l'amplitude de l'onde devient supérieure à la longueur d'onde divisée par 2π. La pente maximum de la paroi dans ce cas est égale à 1 et l'hypothèse d'une faible pente n'est plus vérifiée. On constate donc que la solution obtenue pour $\alpha = 0$, c'est à dire pour une longueur d'onde infinie possède elle aussi un surprenant domaine de validité.

IV - TRANSPORT PERISTALTIQUE DANS L'URETERE

4. 1 INTRODUCTION

L'acheminement de l'urine entre les reins et la vessie par les uretères constitue un exemple physiologique bien connu du transport péristaltique. Ce transport ne s'effectue pas seulement par gravité, qui n'agit pas lorsque l'uretère est horizontal, mais sous l'action d'ondes péristaltiques issues du pelvis rénal, qui se propagent vers la vessie. Des observations cinéradiographiques telles que celles de Benjamin (3) montrent que l'urine se propage dans les uretères sous la forme de poches ou zones dilatées suivies de régions contractées ne renfermant, semble-t-il, pas de fluide. Ces poches se déplacent de manière quelque peu saccadée et se déchargent dans la vessie en franchissant la jonction utérovesicale qui constitue une zone de résistance avant la vessie. L'expulsion de cette poche d'urine, sous l'action de la contraction péristaltique, se fait sous la forme d'un jet.

Une autre évidence de la présence d'ondes péristaltiques est fournie par des enregistrements de pression obtenus en introduisant un cathèter dans l'uretère. Ces enregistrements font apparaître des ondes solitaires irrégulièrement espacées qui correspondent au passage de la zone contractée au dessus du point de mesure. La pression de part et d'autre de l'onde est constante et au même niveau. Ceci est donc une preuve que le transport de l'urine est un transport actif ou péristaltique et non un transport passif qui s'accompagnerait nécessairement d'un gradient de pression négatif. En outre, un transport passif nécessiterait une pression dans les calyces rénaux plus élevée que celle dans la vessie alors que c'est en fait l'inverse qui se produit. Comme la pression dans la vessie s'élève lorsque celle-ci se remplit, la jonction uretérovesicale agit comme un clapet antiretour pour empêcher la régurgitation de l'urine dans les uretères. Le rôle des contractions péristaltiques est non seulement de propulser la poche d'urine mais aussi d'ouvrir temporairement le clapet uretérovesiculaire pour permettre à l'urine de pénétrer dans la vessie. Il n'est donc pas étonnant de constater que le maximum des ondes de pression correspond au maximum de la pression vesicale, soit environ 25 mmHg.

Dans ce chapitre nous nous proprosons de mettre sur pied un modèle simplifié mais quantitatif du transport péristaltique en adaptant au cas de l'uretère la théorie générale décrite dans les chapitres précédents. Pour cela, nous utilisons les données anatomiques et physiologiques disponibles, notamment celles rassemblées par Kiil (23) et par Boyarsky et Labay (7). Mais nous n'entreprenons pas de déterminer ici la forme géomètrique des ondes dans la paroi uretérale qui résulte d'un équilibre entre les forces hydrodynamiques dues aux fluides et les tensions dans la paroi engendrées par une action neuromusculaire.

Nous avons choisi une forme d'onde schématique, conduisant à des calculs simples et nous cherchons si les résultats qu'elle produit sont compatibles avec toutes les données physiologiques connues et si l'on peut en déduire d'autres informations sur des grandeurs difficilement mesurables, telles que les dimensions intérieures de l'uretère contracté. Enfin nous cherchons aussi à déterminer si le phénomène de reflux décrit dans le théorie générale du transport péristaltique par un train d'ondes sinusoïdal peut se produire dans l'uretère et expliquer ainsi l'acheminement des bactéries de la vessie vers les reins observé dans le cas d'infection de la vessie.

Données physiologiques sur l'uretère

Boyarsky et Labay (7) ont fourni un certain nombre d'indications sur les dimensions de l'uretère chez l'homme. Sa longueur varie de 27 à 37 cm. Les radiographies prises avec un fluide contrastant font apparaître une région dilatée (poche ou bolus) de 3 à 10 cm de long et de 1 à 4 mm de diamètre. Son volume se situe entre 0,1 et 0,6 ml. La fréquence des contractions varie de 1 à 5 par minute. Le débit correpondant s'étage de 0,1 à 3 ml/mn. La vitesse de propagation des ondes péristaltiques est relativement constante et se situe entre 2,7 et 3cm/s. Il y a rarement plus d'une onde péristaltique présente à la fois dans l'uretère.

Si l'on peut admettre que la section intérieure du bolus est à peu près circulaire et que ses dimensions intérieures sont approximativement connues, il n'en est pas de même de celles de la partie contractée qui apparaît à la radiographie comme très étroite et presque vide de liquide opacifiant.

La forme de la section transversale dans son état contracté n'est pas non plus connue sans ambiguité. Il semblerait logique, pour des raisons mécaniques, que le diamètre intérieur de l'uretère ne puisse pas passer de 4 mm dans sa phase dilatée à moins de 0,25 mm en phase contractée sans que la paroi forme des plis. En fait, des observations de Tanagho et coll. (38) montrent que l'uretère en phase collabée possède une section intérieure en forme d'étoile avec environ 5 ou 6 branches issues d'une partie centrale. Il semble raisonnable d'admettre que cette forme subsiste en phase contractée avec même un rétrécissement plus accentué de la partie centrale (Fig. 4.1). La détermination des dimensions intérieures de l'uretère contracté qui sont difficilement mesurables constitue d'ailleurs l'un des buts de notre modèle.

Le dernier type d'information disponible concerne l'enregistrement de la pression à l'intérieur de l'uretère à l'aide de cathéters. Kiil (23) a effectué de nombreux enregistrements à l'aide de cathéters de tailles 4F à 8F connectés à des jauges de contrainte. Bien que les diamètres de ces cathéters soient égaux ou supérieurs au diamètre intérieur de l'uretère, Kiil a supposé que le fonctionnement de l'uretère n'était pas perturbé parce que les cathéters ne provoquaient pas de retention d'urine et que les enregistrements de pression n'étaient pas très sensibles à la dimension des cathéters.

Ces enregistrements, dont un échantillon typique est reproduit sur la Fig. 4.2, décrivent comment la pression varie en fonction du temps au site de la mesure. On observe une succession d'ondes progressives solitaires plutôt qu'un train continu. L'amplitude de ces ondes est régulière et ne varie pas avec le sîte de la mesure. Elle se situe entre 10 et 20 mm Hg. Entre les ondes la pression dans l'uretère est constante et égale à une valeur variant entre 10 et 15 mm Hg. La pression est la même de part et d'autre de l'onde et ne descend jamais en dessous de ce niveau de base. Les maxima de pression se situent entre 25 et 40 mm Hg, ce qui correspond à peu près au maximum de pression dans la vessie. Morales et coll. (32) ont remarqué que lorsque la pression vesicale approchait 30 mm Hg, la pression de base de l'uretère s'élevait et la contraction devenait multiphasique. Le mécanisme péristaltique

cessait même à partir d'un certain seuil de la pression vésicale.

Du fait que la pression de l'uretère entre les ondes n'est pas affectée en temps normal par la pression vesicale, on déduit que la jonction urétéro-vesicale fonctionne comme une vanne et que l'urine ne peut être déversée dans la vessie que si la pression produite par l'onde de contraction excède la pression vesicale. A cause de la présence de cette vanne, on peut faire l'hypothèse que le débit est nul dans les parties inactives de l'uretère. Le fait qu'il n'y ait pas de gradient de pression visible soit avant soit après l'onde, est un argument supplémentaire en faveur de cette hypothèse. S'il y avait un écoulement, il y aurait un gradient de pression causé par la friction.

Une autre observation intéressante a été faite concernant le déphasage entre le passage du bolus et de la contraction et celui du pic de pression. Barry (1) a observé chez le chien que le pic de pression se produisait environ 1,5 s. après le débit de la contraction. Ce délai ne dépend pas du débit mais de l'animal. Nous proposerons une interprétation de ce délai à l'aide de notre modèle.

4. 2 MODELE D'ONDES PERISTALTIQUES DANS L'URETERE

Les données physiologiques résumées précédemment permettent de définir les critères auxquels doit satisfaire le modèle. Pour définir complètement ce modèle on va choisir des valeurs moyennes pour chacune des variables. Les critères choisis sont les suivants :

a) L'onde de pression est approximativement triangulaire avec une hauteur de 15 mm Hg et une largeur à la base de 7 cm.
Elle se déplace à la vitesse constante de 3 cm/s.

b) La pression est la même avant et après l'onde.

c) Le débit est nul dans les régions inactives de l'uretère.

Il reste à définir la forme de l'onde dans les parois de l'uretère qui satisfait à ces critères. Le choix d'une forme géométrique particulière n'est pas un facteur critique dans la formulation du modèle. Toutefois elle doit être compatible avec les critères a et b. Pour des raisons de simplicité d'exposition nous avons choisi une forme géométrique très simple en escalier, qui est représentée sur la Fig. 4.3. La pression correspondante dans l'uretère est représentée en dessous. Il est certain que cette forme d'onde anguleuse n'a pas la prétention d'être une représentation réaliste mais elle reproduit les données physiologiques essentielles avec des calculs particulièrement simples ; on pourrait sans difficulté employer une forme d'onde de forme arrondie mais les calculs seraient plus compliqués et nécessiteraient en général le recours à un ordinateur. D'autre part, le peu d'informations connues sur la forme véritable de l'onde ne justifie pas à présent de recourir à des calculs plus complexes.

L'onde choisie se compose d'abord du bolus supposé cylindrique, qui transporte la majeure partie de l'urine. Comme le diamètre est grand, le gradient longitudinal de pression, proportionnel on l'a vu à $1/d^4$, est très faible dans le bolus. Ce bolus est suivi d'une zone de transition, de diamètre très inférieur, quoique supérieur à celui de l'uretère inactif. On montrera par la suite que la pression croît linéairement rapidement lorsque cette zone passe au dessus du point de mesure. Après cette zone de transition se trouve la zone de contraction proprement dite dont le diamètre est inférieur à celui de l'uretère en période inactive. C'est pendant cette zone que la pression décroît linéairement vers son niveau de base. Le sommet de l'onde de pression, qui dans ce cas est exactement triangulaire, correspond à la frontière entre la zone de transition et celle de contraction. Cette disposition consistant en un bolus de dimensions relativement grandes suivi d'une zone de transition et d'une zone de contraction, est la seule qui permette de respecter les données physiologiques du volume d'urine transporté et de l'urométrogramme. Ce raisonnement va être justifié par le développement mathématique.

4. 3 MODELE MATHEMATIQUE

On suppose que l'inertie du fluide est négligeable puisque le nombre de Reynolds dans l'uretère est très petit. En effet, le nombre de Reynolds du transport péristaltique pour les données du modèle est égal environ à :

$$\frac{cd}{\nu}\,\alpha = 0,4 \qquad (4.1)$$

L'équation de départ est toujours celle de l'équilibre entre les forces de viscosité et de pression. On a vu que cette équation conduit à une distribution de vitesse parabolique (écoulement de Poiseuille). Par contre, dans le cas de l'uretère, la forme de l'onde et les conditions aux limites sont différentes des ondes sinusoïdales.

On normalise maintenant les distances transversales par rapport au rayon de la section inactive de l'uretère. Les autres variables sont normalisées de la même manière qu'au chapitre II. Il faut évidemment distinguer deux cas suivant que l'écoulement est axisymétrique ou bidimensionnel. Dans ce qui suit les équations numérotées avec l'indice a correspondent au cas bidimensionnel et celles avec l'indice b au cas axisymétrique. On obtient l'équation de quantité de mouvement (2.12) que nous récrivons ici :

$$P_{\xi} = -3\,\frac{(\hat{Q} + H)}{H^3} \qquad \text{bidimensionnel} \qquad (4.2a)$$

$$= -8\,\frac{(\hat{Q} + H^2)}{H^4} \qquad \text{axisymétrique} \qquad (4.2b)$$

où $\hat{Q}$ est le débit dans un repère lié à l'onde, relié au débit dans un repère fixé par :

$$Q = \hat{Q} + H \qquad (4.3a)$$

$$= \hat{Q} + H^2 \qquad (4.3b)$$

Dans la partie inactive, H = 1 et le gradient de pression est nul. Il s'ensuit que $\hat{Q} = -1$. Ce résultat implique en outre que dans le repère fixe le débit est nul dans la partie inactive. Or, nous avons vu précédemment que la jonction uretéro-vesicale se comporte comme vanne qui ne s'ouvre qu'au passage de l'onde. On peut vérifier ici la cohérence du modèle. Il concilie en effet l'observation tirée des urométrogrammes qu'il n'y a pas de gradient de pression entre les ondes avec d'autres observations que l'urine n'est déchargée dans la vessie qu'au moment du passage d'une onde. Il résulte de ce qui précède et de l'équation (4.2)

$$P_\xi = -3\frac{(H-1)}{H^3} \qquad (4.4a)$$

$$= -\frac{8}{H^4}(H^2 - 1) \qquad (4.4b)$$

Dans la zone dilatée H > 1, la pression diminue dans le sens de propagation de l'onde tandis qu'elle augmente dans la zone contractée. On voit que d'après (4.4) pour chacune des phases de l'onde en échelon le gradient de pression est constant et l'onde de pression est exactement triangulaire. De même, (4.3) devient :

$$Q = H - 1 \qquad (4.5a)$$

$$= H^2 - 1 \qquad (4.5b)$$

Le débit est dans le sens de l'onde dans les parties dilatées (H > 1) et dans le sens contraire dans les parties contractées (H < 1). Pour une abscisse donnée on peut écrire, puisque $\hat{\xi} = \xi - \tau = \text{const.}$

Les équations (4.4) et (4.6) montrent que, au sîte de mesure, la dérivée de la pression par rapport au temps est positive si $H > 1$ et négative si $H < 1$. Cette remarque entraîne que la montée de la pression enregistrée correspond à une partie dilatée de l'uretère et que la pression décroît pendant la partie contractée de section inférieure à celle de la partie inactive.

Le volume d'urine transportée par l'onde est :

$$V = \int_0^1 Q d\tau = \bar{H} - 1 \qquad (4.7a)$$

$$= \bar{H}^2 - 1 \qquad (4.7b)$$

où $\bar{H} = \int_0^1 H \, d\tau$ désigne la valeur moyenne de H.

Il résulte de l'équation (4.4) que, dans chaque partie de l'onde, le gradient de pression est constant puisque la dimension transversale H est constante sur chacun des segments. On se trouve donc dans le cas d'un écoulement de Poiseuille dans chacun des segments de l'onde et l'on peut directement écrire les relations entre le débit Q_i dans chacune des parties de l'onde et le gradient de pression correspondant en utilisant les formules classiques. Pour expliciter les relations, il faut préciser complétement la forme de la section intérieure de l'uretère. On a vu précédemment que si la section du bolus était approximativement circulaire celle des parties contractées avait sans doute une forme s'apparentant à une étoile irrégulière (fig. 4.1). Toutefois on va supposer dans un premier calcul que la section intérieure de l'uretère demeure circulaire dans toutes les phases de l'onde et on comparera ensuite les résultats avec ceux obtenus pour une forme se rapprochant davantage de la forme réelle. Dans les deux cas la dimension transversale H de l'onde est constante à l'intérieur de chaque partie de l'onde, et il résulte de l'équation (4.4) que le gradient de pression est constant. On a donc, dans chacune des sections de l'uretère, un écoulement de Poiseuille avec une distribution de vitesse parabolique. On peut donc écrire directement la relation entre le débit Q_i et la gradient de pression dans chaque section.

Dans ce qui suit, on attribue un indice à chacune des parties de l'onde :

0, pour la zone inactive,
1, pour la zone contractée,
2, pour la zone de transition,
3, pour la zone de dilatation.

a) cas où la section intérieure reste toujours circulaire

Si H_i est le rayon de la zone i, normalisé par rapport à celui de la zone inactive, et $P_{\xi i}$ le gradient de pression correspondant, la combinaison de (4.4b) et (4.5) fournit :

$$Q_i = - H_i^4 P_{\xi i}/8 = H_i^2 - 1 \qquad (4.8)$$

La condition pour que l'amplitude de l'onde de pression soit égale à une valeur donnée ΔP_{max} s'écrit :

$$P_{\xi 1} L_1 = -(P_{\xi 2} L_2 + P_{\xi 3} L_3) = \Delta P_{max} \qquad (4.9)$$

On a vu que le gradient de pression est donné par la différence de 2 termes dont le plus grand est inversement proportionnel à H_i^2. Or d'après les résultats de ce modèle, le rayon du bolus est plus grand que celui des autres parties de l'onde. Il s'ensuit que le gradient de pression dans le bolus $P_{\xi 3}$ est négligeable devant celui de la zone de transition $P_{\xi 2}$. En effectuant cette approximation et en utilisant l'équation (4.8), on tire :

$$\frac{- 8(H_1^2 - 1) L_1}{H_1^4} = \frac{+ 8}{H_2^4} (H_2^2 - 1) L_2 = \Delta P_{max} \qquad (4.10)$$

Les équations (4.10) peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$A_i H_i^4 - H_i^2 + 1 = o \qquad i = 1,2 \tag{4.11}$$

avec $$A_1 = - \Delta P_{max}/8L_1 \tag{4.12a}$$

$$A_2 = \Delta P_{max}/8L_2 \tag{4.12b}$$

Les solutions de l'équation (4.11) s'écrivent immédiatement :

$$H_i^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4A_i}}{2A_i} \tag{4.13}$$

Comme A_1 est négatif, il y a une seule racine acceptable pour la section normalisée de la zone contractée H_1^2. Par contre, il y a 2 racines possibles pour la section de la zone de transition H_2^2.

On peut représenter l'ensemble des solutions sur un graphique unique (Fig. 4.4). On constate alors les inégalités suivantes :

$$A_2 = \frac{\Delta P_{max}\ 2\pi r_o^2}{8\mu c\ L_2} < \frac{1}{4} \tag{4.14}$$

$$o < H_1^2 < 1$$

$$1 < H_{2inf}^2 < 2$$

$$2 < H_{2sup}^2$$

Pour chaque valeur de ΔP_{max} et L_1 et L_2 on peut calculer les valeurs de A_1 et A_2 et on obtient les solutions pour H_1^2 et H_2^2 aux points d'intersection de la courbe avec les parallèles à Oy menées par les points d'abscisses A_1 et A_2 respectivement. Pour les valeurs des paramètres choisis pour le modèle ΔP_{max} = 15 mm Hg, c = 3 cm/s, $L_1 = L_2$ = 3,5 cm, μ = 0,7 cp (à 37°) les inégalités (4.14) conduisent à assigner des limites supérieures aux rayons des différentes parties de l'onde. L'on trouve :

$$
\begin{aligned}
&0 < r_o < 2{,}8\ 10^{-2}\ \text{mm} \\
&0 < r_1 < r_o < 2{,}5\ 10^{-2}\ \text{mm} \\
&0 < r_o < r_2 < 5{,}65\ 10^{-2}\ \text{mm}
\end{aligned}
\qquad (4.15)
$$

Les valeurs de r_1 et r_2 sont représentées en fonction de r_o sur la figure (4.5). On constate que ces rayons sont beaucoup plus petits que celui de la zone dilatée (bolus). Les conclusions de ce modèle sont donc compatibles avec les observations radiographiques que l'uretère paraît vide entre les zones dilatées. Les faibles dimensions de la zone de transition par rapport au bolus font que celle-ci apparaît à l'observation comme une pseudo-zone contractée. Par contre le pic de pression se produit au début de la zone de transition véritable, c'est à dire avec un retard égal à L_2/c par rapport à la fin du bolus. L'observation de Barry (1) est donc bien expliquée par le modèle.

Volume d'urine

Le volume d'urine transportée par l'onde est donné par :

$$
\begin{aligned}
V = \int_0^T Q\,dt &= \pi c \int_o^L (r_i^2 - r_o^2)\,dx \\
&= (S_3 - S_o)\,L_3 + (S_2 - S_o)\,L_2 + (S_1 - S_o)\,L_o \\
&\simeq S_3 L_3 \quad \text{puisque } S_3 >> S_2 > S_o > S_i
\end{aligned}
\qquad (4.16)
$$

Le volume transporté par l'onde est pratiquement égal au volume du bolus et est indépendant de la morphologie de l'onde de contraction. On peut donc satisfaire n'importe quel volume observé physiologiquement en ajustant le rayon r_3 ou la longueur L_3. Pour r_3 = 2 mm et L_3 = 4 cm par exemple, on obtient un volume de 0,5 ml par onde qui correspond à la valeur médiane des volumes observés.

Vitesses des particules fluides

Comme l'on se trouve dans le cas d'un écoulement de Poiseuille, la distribution de vitesse est parabolique. La vitesse maximum, au centre, est égale au double de la vitesse moyenne. Avec l'aide de (4.8) on trouve :

$$U_{i\,max} = 2Q_i/H_i^2 = 2(1 - H_i^{-2}) \qquad (4.17)$$

On note que dans le bolus, pour lequel $H_3 >> 1$, la vitesse maximum est positive et pratiquement égale à 2. Il résulte que la vitesse moyenne du fluide est pratiquement égale à la vitesse de l'onde. Dans la section contractée, la vitesse est négative et le fluide se déplace dans la direction opposée à l'onde.

b) cas où la section intérieure contractée a une forme étoilée

On suppose dans ce cas que l'uretère est constitué d'un faisceau de canaux étroits bidimensionnels disposés en étoile. Le débit de chacun de ces canaux s'exprime à l'aide de (4.2) et (4.4) par

$$Q_i = \frac{-H_i^3 P_{\xi i}}{3} = H_i - 1 \qquad (4.18)$$

La condition (4.9) qui impose l'amplitude de l'onde de pression, s'écrit dans ce cas :

$$\frac{-3(H_1 - 1)}{H_1^3} \quad L_1 = \frac{3(H_2 - 1)}{H_2^3} \quad L_2 = \Delta P_{max} \tag{4.19}$$

De la même manière que dans le cas circulaire, on peut mettre les équations (4.19) sous la forme :

$$B_i H_i^3 - H_i + 1 = o \qquad i = 1,2 \tag{4.20}$$

avec $$B_1 = -\Delta P_{max}/3L_1 \tag{4.21}$$

$$B_2 = \Delta P_{max}/3L_2$$

La variation de H_i en fonction de B_i est indiquée sur la Figure (4.6). On constate que comme dans le cas circulaire, il existe une valeur de H_1 correspondant à une valeur de B_1 mais par contre deux valeurs de H_2 possibles pour une valeur de B_2. En outre on peut tirer de la figure (4.7) les inégalités suivantes :

$$B_2 = \frac{\Delta P_{max}}{3L_2} < \frac{4}{27}$$

$$o < H_1 < 1 \tag{4.22}$$

$$1 < H_{2inf} < \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} < H_{2sup}$$

La première inégalité (4.22) impose une limite supérieure à la largeur du canal. Les dimensions des parties contractées et en phase de transition sont données en fonction de la largeur de la phase inactive que la figure (4.7) pour les valeurs choisies des paramètres qui sont énumérées dans la section précédente. On constate que ce modèle prédit des limites supérieures aux dimensions transversales des canaux qui sont :

$$o < a_o < 2{,}56\ 10^{-2} mm$$

$$o < a_1 < 2{,}25\ 10^{-2}\ mm$$

$$o < a_2 < 6{,}6\ 10^{-2}\ mm$$

De même que dans le cas de l'uretère à section circulaire, ces dimensions sont beaucoup plus petites que celles du bolus d'urine.

Vitesse des particules fluides

La vitesse moyenne est donnée par, pour la zone i :

$$U_i = \frac{Q_i}{H_i} = 1 - H_i^{-1}$$

De même que dans le cas circulaire, la vitesse moyenne du fluide est pratiquement égale à celle de l'onde dans le bolus pour lequel $H_3 << 1$. La vitesse devient négative dans la zone contractée puisque $H_1 < 1$.

4. 4 REFLUX

Nous allons maintenant examiner dans quelles conditions ce modèle prédit un reflux, c'est à dire un transport d'une partie du fluide en sens con-

traire de l'onde. Dans ce but on adapte au cas présent la méthode décrite au chapitre 2. On développe l'équation des lignes de courant dans le repère lié à l'onde, en fonction du petit paramètre $\varepsilon = \hat{\chi} - \hat{\chi}_p$ et l'on calcule le débit dans le tube de courant limité par $\hat{\chi}$. Il faut évidemment distinguer dans les calculs le cas bidimensionnel et le cas circulaire.

a) cas circulaire

La vitesse dans le repère lié à l'onde s'obtient à l'aide de l'équation (4.17)

$$\hat{U}_i = 2\left(1 - \frac{1}{H_i^2}\right)\left(1 - \frac{R^2}{H_i^2}\right) - 1 = \frac{1}{2R}\frac{\partial \hat{X}}{\partial R} \qquad (4.23)$$

L'intégration de (4.23) par rapport à R fournit la fonction de courant dans le repère lié à l'onde.

$$\hat{\chi} = R^2(1 - 2R^2/H_i^2) - \frac{R^4}{H_i^2}\left(1 - \frac{1}{H_i^2}\right) \qquad (4.24)$$

A la paroi $R = H_i$, on a $\hat{\chi}_p = -1$.

Le débit instantané dans le tube de courant limité par la fonction de courant χ s'écrit :

$$Q_\chi = \hat{\chi} + R^2 \qquad (4.25)$$

Pour obtenir le volume net transporté dans le tube de courant χ il faut prendre l'intégrale de l'équation (4.25) le long de l'onde. On a :

$$\bar{V}_\chi = \int_o^L (R^2 + \hat{\chi})\, d\xi \qquad (4.26)$$

Pour calculer $\overline{Q}_\chi$ lorsque la ligne de courant est au voisinage de la paroi, on suppose que :

$$R^2 = H_i^2 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + ... \qquad (4.27)$$

En substituant (4.27) dans (4.24) et en identifiant les coefficients des puissances de ε, on obtient :

$$a_1 = -1 \qquad (4.28a)$$

$$a_2 = (1 - H_i^2) / H_i^4 \qquad (4.28b)$$

$$a_3 = -2a_2^2 \qquad (4.28c)$$

L'équation (4.26) fournit alors :

$$\overline{V}_\chi = V + \varepsilon^2 \left[\frac{1 - H_1^2}{H_1^4} L_1 + \frac{1 - H_2^2}{} L_2 \right]$$

$$- 2\varepsilon^3 \left[\frac{(1 - H_1^2)^2}{H_1^8} L_1 + \frac{(1 - H_2^2)^2}{H_2^8} L_2 \right] \qquad (4.29)$$

en négligeant la contribution du bolus qui est très faible.

On voit, à l'aide de l'équation (4.10) que si la pression est la même de part et d'autre de l'onde péristaltique comme il a été postulé dans le modèle, le coefficient de ε^2 dans l'équation (4.29) est nul. Le coefficient de ε^3, lui, est toujours négatif et il s'ensuit que le débit dans le tube de courant est toujours inférieur au débit total, et donc qu'il n'y a pas reflux près de la paroi. Pour qu'il y ait un reflux il faudrait que le coefficient de ε^2 soit positif, soit :

$$\frac{1 - H_1^2}{H_1^4} L_1 > \frac{H_2^2 - 1}{H_2^4} L_2$$

ou

$$P_{\xi 1} L_1 > - P_{\xi 2} L_2$$

c'est à dire que la pression soit plus élevée en aval de l'onde qu'en amont (Fig. 4.8).

b) cas de canaux bidimensionnels

On procède de la même manière que précedemment. La vitesse instantanée est :

$$\hat{U}_i = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{H_i}\right) \left(1 - \frac{\eta^2}{H_i^2}\right) - 1 \qquad (4.30)$$

où η est la distance à l'axe. La fonction de courant s'écrit alors :

$$\hat{\chi} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{H_i}\right) \left(\eta - \frac{\eta^3}{3H_i^2}\right) - \eta \qquad (4.31)$$

On suppose que l'équation de la ligne de courant χ est donnée par :

$$\eta = H_i + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + ... \qquad (4.32)$$

et l'on substitue (4.32) dans (4.31). On trouve par identification :

$$a_1 = - 1 \qquad (4.33)$$

$$a_2 = \frac{3}{2H_i^2} (1 - H_i)$$

Le volume transporté entre l'axe et la ligne de courant χ est donné par :

$$\bar{V}_\chi = \hat{\chi} + \int_o^L \eta \, d\xi$$

soit

$$\bar{V}_\chi = V + \frac{3\varepsilon^2}{2}\left[\frac{(1 - H_1)}{H_1^2} L_1 + \frac{1 - H_2}{H_2^2} L_2\right] \qquad (4.34)$$

A l'aide de (4.19), (4.34) devient :

$$\bar{V}_\chi = V + \varepsilon^2 \Delta P_{max} (H_1 - H_2) \qquad (4.35)$$

Comme $H_1 < H_2$, $\bar{V}_\chi < V$ et il n'y a pas de reflux près de la paroi.

4. 5 POCHES DE RECIRCULATION PIEGEES

On a vu au chapitre II que ces poches de recirculation, si elles existent, sont limitées sur l'axe par les points d'arrêts dans un repère lié à l'onde. La condition d'existence de ces poches peut donc s'écrire :

a) Pour une section circulaire

$$\hat{U}(R=o) = 1 - 2/H_i^2 = o$$

soit $H_i = \sqrt{2}$

Si $H_2 < \sqrt{2}$ les points d'arrêts se situent aux extrémités du bolus quand $H_2 \to H_3$ et la poche de recirculation est limitée au bolus. Par contre si $H_2 > \sqrt{2}$ un des points d'arrêt se situe entre la zone de contraction et de transition, et la poche de recirculation occupe à la fois la zone de transition et le bolus.

b) Pour des canaux bidimensionnels

Les points d'arrêt se situent à

$$\hat{U}(\eta=o) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{H_i}\right) = o$$

soit $H_i = 3$

Donc, si $H_2 < 3$, la poche de recirculation est limitée au bolus, si $H_2 > 3$ elle comprend aussi la zone de transition.

V - ETUDE DE L'ECOULEMENT DANS UNE POMPE PERISTALTIQUE

5. 1 INTRODUCTION

Les pompes péristaltiques sont utilisées pour le pompage du sang, de fluides corrosifs ou de produits alimentaires, chaque fois qu'il est nécessaire d'isoler le fluide transporté des parties mécaniques de la pompe. Ces pompes consistent en un tube flexible comprimé sur une partie de sa longueur par un galet tournant (Fig. 5.1) ou une série de cames. Généralement le mécanisme de compression est ajusté de manière à occlure le tube complètement et la pompe fonctionne comme une pompe volumétrique mais nous avons vu qu'il n'est pas nécessaire d'occlure le tube complétement pour produire un pompage mais dans ce cas le fonctionnement n'est plus volumétrique et le débit dépend de la charge.

Les pompes à galets utilisées pour le pompage du sang possédent un inconvénient lors d'une utilisation de longue durée. Elles hémolysent le sang, c'est-à-dire, provoquent une rupture des globules rouges qui laissent échapper leur hémoglobine. Le mécanisme de l'hémolyse est complexe et dépend de facteurs chimiques autant que mécaniques. Dans ce chapitre, nous allons seulement considérer les facteurs mécaniques.

Blackshear et al (5) ont constaté d'après leurs propres observations et les travaux publiés que le sang en circulation extracorporelle était hémolysé même à de faibles vitesses tel que 30 cm/s. et que l'index d'hémolyse, défini comme le nombre de mg d'hémoglobine libérée par 100 ml de sang pompé était indépendant du débit. Par contre, dans un écoulement de cisaillement en l'absence de paroi, tel qu'à la frontière d'un jet le seuil de vitesse nécessaire pour l'hémolyse était beaucoup plus élevé et de l'ordre de 1500 cm/s. Ceci a conduit Blackshear à supposer que la présence de paroi est un facteur important pour l'hémolyse et que le taux d'hémolyse est proportionnel au nombre de collisions entre les hématies et la paroi. Les collisions sont dues à une diffusion des hématies vers la paroi et le coefficient de diffusion est lui-même proportionnel au taux de cisaillement. On retrouve ainsi le résultat observé que le taux d'hémolyse augmente avec le taux de cisaillement dans l'écoulement.

Plus récemment des chercheurs ont provoqué l'hémolyse d'une suspension d'hématies en faisant osciller transversalement un fil (42) ou en pulsant une bulle de gaz à des fréquences ultrasonores (34). Dans ces cas, l'hémolyse se produit au dessus d'un certain seuil de contraintes qui se situe à 4500 dyne/cm^2 dans le cas du fil. Des résultats similaires ont été rapportés par Nevaril et al (32) en utilisant un viscosimètre de Couette. Le seuil de contrainte dans ce cas est de 2500 dyne/cm^2.

Malgré une certaine dispersion des résultats publiés, on peut conclure que le taux d'hémolyse en circulation extracorporelle est une fonction croissante du taux de cisaillement de l'écoulement. Il est donc légitime de penser que si une pompe est conçue ou réglée de manière à minimiser le taux de cisaillement ou les contraintes de frottement, l'hémolyse sera réduite.

La question de savoir si une pompe occlusive produit davantage d'hémolyse qu'une pompe non occlusive a donné lieu à une controverse dans la littérature médicale. En usage médical une pompe occlusive est pratique car son débit est proportionnel à la vitesse de rotation. Par contre il semble intuitivement que le taux de cisaillement augmente pour un débit donné si on diminue la section intérieure du tube comprimé et en outre que les hématies soient broyées si la distance entre les deux parois du tube devient inférieure à 2 ou 3 µ. Bernstein et Gleason (4) après des essais comparatifs de quatre pompes à galets concluent qu'une pompe non occlusive, c'est-à-dire réglée avec un léger jeu, hémolyse beaucoup moins le sang que la même pompe réglée de manière à être occlusive, du moins avec des tuyaux de caoutchouc ou de tygon. Par contre avec des tuyaux de silastic, l'hémolyse est moindre si la pompe est occlusive. Aucune corrélation n'a été trouvée entre l'index d'hémolyse et le diamètre du galet. Des études entreprises par Hodges et al (18) concluent que l'occlusion du tuyau n'augmente pas le taux d'hémolyse. Ces résultats contradictoires reflètent que, à cause de l'épaisseur irrégulière des tubes couramment utilisés, il est difficile de connaître exactement le degré d'occlusion.

Dans ce chapitre, nous allons étudier les détails de l'écoulement dans la zone du tube comprimée par le galet afin de pouvoir répondre aux questions soulevées précédemment. Quelles sont les contraintes maxima produites

dans le fluide en fonction du degré d'occlusion de la pompe et de son débit ? Est-il possible de trouver une géométrie particulière ou un réglage particulier qui minimise ces contraintes ?

5. 2 ETUDE DE L'ECOULEMENT

Représentation de la section intérieure du tube

Pour étudier l'écoulement, il faut d'abord connaître la forme intérieure que prend le tube lorsqu'il est comprimé entre la plaque semi-circulaire et le galet (Fig. 5.1). Il faut que la forme du tube soit définie à la fois dans chaque plan transversal ainsi que dans le plan longitudinal de symétrie.

En ce qui concerne la forme transversale on admet que toutes les sections transversales sont des éllipses de même périmètre égal au périmètre intérieur nominal du tube. Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement en faisant des moulages de platre de tubes comprimés par des cylindres de différents diamètres. La condition que le périmètre reste constant impose une relation entre les demi-axes de l'éllipse a et b.

$$2\pi R = \pi(a + b)\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^2 + \frac{1}{4^3}\left(\frac{a - b}{a + b}\right)^4 + \ldots.\right] \qquad (5.1)$$

où R est le rayon du cercle ayant le même périmètre.

En introduisant les variables sans dimension $A = a/R$ et $B = b/R$ et en remarquant que la série du 2ème membre de l'équation (5.1) converge rapidement, on trouve en ne gardant que les 2 premiers termes de la série et en résolvant pour A.

$$A \simeq \left[4 - 3B + 4(1 - B^2 + B)^{1/2}\right] /5 \qquad (5.2)$$

On constate que l'erreur commise sur A en utilisant l'équation (5.2) au

au lieu de (5.1) ne dépasse pas 2 %. Toutefois pour $B < 0,1$, on utilisera une autre relation qui est encore plus précise.

$$A \simeq \pi/2 + 0(B^2) \tag{5.3}$$

L'équation (5.3) revient à supposer que l'éllipse se réduit à son seul grand axe.

Il reste maintenant à définir la forme du tube dans son plan de symétrie longitudinal. Pour cela, on commence d'abord par négliger la courbure du tube imposée par la plaque circulaire. Cette hypothèse est justifiée par le fait que ce rayon de courbure est plus de dix fois supérieur au rayon intérieur du tube. Avec cette hypothèse, l'un des côtés de la section longitudinale du tube est la droite $\eta = o$. La forme de l'onde produite par le galet est supposé donnée par l'équation

$$\eta = (\hat{Z} + 2\varepsilon D)/(\frac{\hat{Z}^2}{2} + 2D) \tag{5.4}$$

où $\eta = 2b/R$, $\hat{Z} = \hat{z}/R$ désignent les coordonnées normalisées verticales et horizontales respectivement dans le repère lié à l'onde. On remarque que lorsque $\hat{Z} = o$, $\eta = \varepsilon$ et le paramètre ε est donc identifié comme le petit diamètre de l'éllipse au point d'occlusion maximum, c'est-à-dire en fait la dimension transversale minimum dans le plan de symétrie du tube. On peut donc utiliser ε comme mesure de l'occlusion. Pour un tube de rayon intérieur R égal à 1 cm un jeu de 10 µ correspond à $\varepsilon = 10^{-3}$. Pour l'occlusion complète $\varepsilon = o$, le paramètre D est égal au rayon du galet augmenté de l'épaisseur du tube et normalisé par rapport à R. C'est en fait le rapport du rayon de courbure de l'onde à $\hat{z} = o$ au rayon du tube. On remarque que si $\hat{Z} \to \infty$, $\eta \to 2$ et l'on a une transition continue entre les sections élliptiques et la section circulaire.

Toutefois dans la région intéressante, au voisinage de $\hat{z} = o$ où se produisent les plus fortes contraintes, on peut remplacer l'équation (5.4) pour $\hat{Z} << 1$

par l'équation de la parabole osculatrice

$$\eta \cong \frac{\hat{Z}^2}{2D} + \varepsilon \qquad (5.5)$$

Distribution de vitesse, contraintes et pression à l'intérieur du fluide

Afin de simplifier les calculs, on va utiliser certaines approximations :

a) L'angle de la paroi avec l'axe du tube est faible. Ceci est justifié par le fait que le diamètre du galet est nettement plus grand que le diamètre intérieur du tube. Il résulte de cette hypothèse que la pression est à peu près uniforme sur une section transversale.

b) Il y a toujours une onde complète dans le tube. Dans la plupart des pompes disponibles commercialement, un galet entre en contact avec le tube au moment où un autre la quitte et l'addition des régions comprimées par les deux galets forme une onde complète. Il résulte des résultats de la théorie générale du pompage péristaltique que l'écoulement est permanent dans un repère lié à l'onde, à condition évidemment que la charge de la pompe soit constante.

c) Les effets d'inertie peuvent être négligés en première approximation. Cette hypothèse ne sera évidemment valable que pour des débits pas trop élevés et le domaine précis d'application de cette hypothèse sera défini postérieurement une fois la solution obtenue. Mais on peut rappeler que dans le cas d'ondes péristaltiques sinusoïdales, les effets d'inertie sur les caractéristiques du pompage étaient faibles jusqu'à des nombres de Reynolds de l'ordre de 5.

d) Le sang est newtonien. Les effets non newtoniens aux faibles taux de cisaillement ne seront pas importants ici puisque les taux de cisaillement seront au contraire très élevés. Par contre l'effet Fahraeus-Linqvist d'une diminution de la viscosité apparente du sang lorsque le diamètre du tube est inférieur à 100 μ risque d'être important dans la zone d'occlusion . Toutefois il ne s'agit pas d'un capillaire de section circu-

laire et l'une des deux dimensions transversale reste grande. Dans l'impossibilité d'évaluer l'effet Fahraeus-Lindqvist pour cette géométrie, nous l'ignorons en première approximation.

Une fois ces hypothèses faites on se retrouve placé dans le cas de la solution $R_e = \alpha = o$ du Chapitre II avec toutefois une forme d'onde non sinusoïdale et un écoulement qui n'est ni bidimensionnel ni axisymétrique. On sait que dans le repère lié à l'onde, l'écoulement apparaît localement comme un écoulement de Poiseuille. Pour une section élliptique, la composante longitudinale de la vitesse s'écrit :

$$\hat{w} = -c - \frac{1}{2\mu} \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \frac{dp}{d\hat{z}} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-b}{b}\right)^2 \right] \tag{5.6}$$

Le débit mesuré dans le repère lié à l'onde, s'obtient par intégration de l'équation (5.6) sur la section. On trouve

$$\hat{q} = -\pi abc \left(1 + \frac{1}{4\mu c} \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \frac{dp}{d\hat{z}}\right) \tag{5.7}$$

On peut alors tirer le gradient de pression de l'équation (5.7) et le porter dans l'équation (5.6). En effectuant en outre une translation pour se ramener au repère fixe on a :

$$w = \hat{w} + c = 2c \left(1 + \frac{\hat{q}}{\pi abc}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-b}{b}\right)^2 \right] \tag{5.8}$$

A l'aide de variables sans dimensions $\hat{Q} = q/\pi R^2 c$, $W = w/c$, l'équation (5.8) devient

$$W = 2\left(\frac{\hat{Q}}{AB} + 1\right) \left[1 - \left(\frac{X}{A}\right)^2 - \left(\frac{Y-B}{B}\right)^2 \right] \tag{5.9}$$

De la même manière qu'au Chapitre II, le gradient de pression est calculé à partir de l'équation de mouvement dans la direction z. On trouve avec l'aide de (5.7)

$$\frac{d\hat{P}}{d\hat{Z}} = -4\left(\frac{A^2+B^2}{A^2B^2}\right)\left(1+\frac{\hat{Q}}{AB}\right) \tag{5.10}$$

L'augmentation de pression le long de la position de tube situé dans la pompe est donnée par

$$P = \int_o^{\hat{Z}} \frac{dP}{dz'}\,dz' = \int_o^{\hat{Z}} \frac{d\hat{P}}{d\hat{z}}\,d\hat{z}'$$

$$= -4\int_{-T}^{L-T} \left(\frac{A^2+B^2}{A^2B^2} + \hat{Q}\,\frac{A^2+B^2}{A^3B^3}\right) d\hat{Z} \tag{5.11}$$

Dans la région centrale de l'onde où se produisent les gradients les plus importants, l'on a $B << A$, $A \to \pi/2$ et l'équation (5.11) se réduit à

pour $B << A$

$$P = \frac{p}{\mu c/R} = -\frac{8}{\pi}\left[\hat{Q}\int_o^{\hat{Z}} \frac{dZ'}{B^3} + \frac{\pi}{2}\int_o^{\hat{Z}} \frac{dZ'}{B^2}\right] \tag{5.12}$$

Dans l'équation (5.10), on a assigné la valeur zéro à la pression au centre de l'onde $\hat{Z} = o$.

On peut exprimer le débit moyen $\bar{Q}$ dans un repère fixe en fonction du paramètre $\hat{Q}$. L'on a

$$Q = \hat{Q} + AB \tag{5.13}$$

d'où en prenant la moyenne sur une période, c'est-à-dire une rotation complète de la pompe dans le cas de 2 galets

$$\bar{Q} = \hat{Q} + \overline{AB} \tag{5.14}$$

La contrainte normalisée dans le plan de symétrie X = o est donnée par

$$T = \frac{R}{\mu c}\,\tau = \frac{\partial W}{\partial y} = -4\left(\frac{\hat{Q}}{AB} + 1\right)\left(\frac{Y-B}{B^2}\right) \tag{5.15}$$

Au voisinage du centre de l'onde où les contraintes sont les plus grandes, l'écoulement peut être considéré comme bidimensionnel à cause du grand allongement de la section égal à $\pi/(2\varepsilon)$. Il s'ensuit que dans cette région la contrainte reste approximativement égale à sa valeur dans le plan X = o et ne dépend que de Y. Elle est maximum en amplitude aux parois Y = o et Y = 2B

Le paramètre $\hat{Q}$ est maintenant déterminé par la condition que l'accroissement de pression le long du tube soit égal à la charge de la pompe Δp. En utilisant (5.11) intégrée pour Z de o à L, on trouve :

$$\hat{Q} = -\frac{1}{4F^\circ}\,\Delta p - \frac{G^\circ}{F^\circ} \tag{5.16}$$

$$\text{avec } F^\circ = \int_o^L \frac{(A^2 + B^2)}{(AB)^3}\, d\hat{Z} \tag{5.17a}$$

$$G^\circ = \int_o^L \frac{A^2 + B^2}{(AB)^2}\, d\hat{Z} \tag{5.17b}$$

Ici L désigne la longueur du tube en contact avec le galet divisée par le

rayon intérieur R.

Le débit moyen de la pompe peut être calculé avec l'aide de (5.14) et (5.16). On trouve

$$\bar{Q} = - \frac{1}{4F^\circ} \Delta P + \overline{AB} - \frac{G^\circ}{F^\circ} \tag{5.18}$$

La majeure contribution aux intégrales (5.17) provient de la partie centrale de l'onde pour laquelle $B \ll 1$ et $A \simeq \pi/2$. Dans cette région on peut remplacer l'onde par sa parabole oscillatrice (Eq. 5.5) et on trouve :

$$F^\circ \simeq 6 \sqrt{2D}\ \varepsilon^{-5/2} + O(\varepsilon^{-3/2}) \tag{5.19a}$$

$$G^\circ \simeq 2\pi \sqrt{2D}\ \varepsilon^{-3/2} + O(\varepsilon^{1/2}) \tag{5.19b}$$

A l'aide des approximations (5.19), l'équation (5.16) devient :

$$\hat{Q} = - \frac{\Delta P\ \varepsilon^{5/2}}{24\sqrt{2D}} - \frac{\pi\varepsilon}{3} \tag{5.20}$$

et (5.18) donne

$$\bar{Q} = - \frac{\Delta P\ \varepsilon^{5/2}}{24\sqrt{2D}} + \overline{AB} - \frac{\pi\varepsilon}{3} \tag{5.21}$$

Si la pompe est réglée de manière à être complétement occlusive ($\varepsilon = o$), son débit devient indépendant de la charge et égal à

$$\bar{Q}_o = (\overline{AB})_{\varepsilon=o} \tag{5.22}$$

Domaine de validité de la théorie

Avant d'expliciter les résultats de cette théorie, il est important de définir son domaine de validité dont les limites sont imposées par les hypothèses faites au début. L'approximation principale vient du fait d'avoir négligé les termes d'inertie.

Il suffit de considérer comme terme d'inertie le terme $\hat{w} \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}$, soit en variables normalisées $\frac{\rho c^2}{R} \hat{W} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{Z}}$, car on peut montrer que les autres termes sont du même ordre de grandeur. De même les forces de viscosité sont approximativement égales à

$$\frac{\mu c}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial Y^2} \right)$$

Le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité au nombre de Reynolds peut donc être caractérisé par

$$R_e = \frac{Rc}{\nu} \hat{W} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{Z}} \frac{1}{\left(\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial Y^2} \right)} \qquad (5.23)$$

On peut évaluer à l'aide de l'équation (5.9) ce nombre de Reynolds sur l'axe du tube où il est maximum. On trouve :

$$R_e = \frac{Rc}{\nu} \frac{AB}{A^2 + B^2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{Q}}{AB} + 1 \right) \right] \hat{Q} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dB} \right) \frac{dB}{d\hat{Z}} \qquad (5.24)$$

Comme dans chaque écoulement oscillatoire le nombre de Reynolds local devient infini lorsque la vitesse change de signe car les forces de friction s'annulent en ce point. Mais cette discontinuité locale ne rend pas invalide l'hypothèse que l'inertie est négligeable si le nombre de Reynolds

demeure petit pour le reste de l'écoulement. Le nombre de Reynolds défini par (5.24) est évidemment fonction de $\hat{Z}$. Comme il est nul pour Z = o et à l'extrémité de l'onde puisque $dB/d\hat{Z}$ est nul en ces deux points, il passe par un maximum en valeur absolue en un certain point de l'onde. Une fois cette valeur maximum déterminée, on peut exprimer le nombre de Reynolds maximum en fonction des paramètres $\bar{Q}$ et ΔP en utilisant (5.13) et (5.16), le seul autre paramètre restant étant ε . Les courbes correspondant à $R_{e\ max} = 1$ dans un système de coordonnées $\bar{Q}$ - ΔP sont données sur la figure (5.3) pour différentes valeurs de ε. Les régions pour lesquelles $R_{e\ max} < 1$ se trouvent en dessous et à gauche de ces courbes. Ce sont également les régions dans lesquelles la théorie sans inertie peut être considérée comme valide. Les calculs ont été effectués pour des diamètres de galet égaux à cinq fois le diamètre intérieur du tube. On constate que le domaine de validité est d'autant plus grand que l'on s'approche de l'occlusion complète. On a représenté aussi sur ce diagramme des points correspondants à une pompe de débit normal 3l/min pour une charge de 300 mmHg et utilisant successivement 4 tuyaux de diamètre différents. Comme on peut s'y attendre, l'inertie est moins importante avec les tubes de petit diamètre.

5. 3 RESULTATS

Cas des pompes classiques avec galets circulaires

La distribution de pression dans le fluide comprimé par le galet s'obtient par intégration numérique de l'équation (5.10) : elle est représentée sur la figure (5.3) pour 2 valeurs de degré d'occlusion $\varepsilon = 10^{-2}$ et 10^{-3} respectivement et des valeurs des paramètres correspondant à une situation typique en usage chirurgical (p = 300 mmHg, $\bar{Q}$ = 3 l/min, R = 1 cm, d = rayon du galet = 3 cm). On constate que le galet provoque une aspiration, zone de basse pression immédiatement en aval du centre de l'onde et une compression dans laquelle la pression dépasse la pression de refoulement, symétrique de la zone de respiration par rapport au centre de l'onde. Les écarts de pression sont d'autant plus prononcés que ε est petit, c'est-à-dire que l'on s'approche de l'occlusion complète. Pour $\varepsilon = 10^{-3}$, la variation de pression a lieu sur une distance égale à une petite fraction du diamètre intérieur, c'est-à-dire une fraction encore plus faible du diamètre de galet. C'est donc la région au voisinage immédiat du centre de l'onde, c'est-à-dire

du point d'occlusion maximum qui est la plus importante pour les contraintes. Dans cette région la pente de la paroi est faible ce qui justifie les hypothèses employées pour l'obtention de la solution. Comme l'inertie du fluide est négligée la vitesse est en phase avec le gradient de pression et les extrema de pression correspondent aux points où la vitesse change de signe. Loin du centre de l'onde la vitesse est dans le sens de rotation du galet tandis que dans la région immédiatement sous le centre du galet le fluide se déplace en sens contraire du galet pour $\varepsilon \neq o$. Cette inversion de vitesse correspond à un début de fluite dû à la pression de refoulement. On peut donc extrapoler ces résultats au cas limite de l'occlusion complète ($\varepsilon = o$). Dans ce cas, il n'y a pas de débit de fuite donc pas de points où la vitesse change de sens. Il résulte que les extrema de pression sont situés au centre de l'onde et que la pression change discontinuement de $-\infty$ $+\infty$ lorsque $\hat{Z}$ passe de $-o$ à $+o$. On conçoit donc qu'une cavitation puisse se produire si ε est suffisamment petit.

La contrainte de cisaillement calculée à partir de l'équation (5.15) est représentée sur la Figure (5.4) pour les mêmes conditions que la pression et pour plusieurs valeurs de ε. On constate immédiatement qu'au voisinage du centre de l'onde, dans la partie comprimée du tube, les contraintes sont plusieurs milliers de fois plus grandes que dans la partie cylindrique du tube. Dans le cas d'occlusion complète ($\varepsilon = o$), les contraintes sont toujours négatives et deviennent infinies au centre de l'onde. Lorsque ε est petit mais reste fini, la distribution de contrainte présente trois extrema, un maximum positif au centre de l'onde et deux minima négatifs symétriques l'un de l'autre par rapport au centre de l'onde. Un résultat surprenant est que la contrainte maximum croît avec ε lorsque ε passe de 10^{-3} à 10^{-2}. En fait, ainsi qu'il est montré sur la figure (5.5.), la contrainte au centre de l'onde atteint un minimum pour $\varepsilon \simeq 1{,}6\ 10^{-3}$.

Les extréma négatifs sont plus petits en valeur absolue que l'extrémum positif au centre de l'onde. L'accroissement du diamètre du galet ne diminue que de peu les contraintes sauf aux grandes valeurs de ε. En circulation extracorporelle, le paramètre $\mu c/R$ varie entre 0,5 et 2 dynes/cm^2. On peut donc voir sur les figures (5.4) et (5.5) que les contraintes dans une pompe à galet dépassent généralement le seuil critique pour l'hémolyse mentionné en introduction.

Une autre variable intéressante du point de vue de l'hémolyse est le débit Z = o qui représente la fraction de sang pompé soumise aux contraintes élevées. Avec l'aide des équations (5.14) et (5.5) on trouve, pour ce débit

$$\bar{Q}_o = \hat{Q} + \pi\varepsilon/4 \qquad (5.25)$$

Les valeurs $\bar{Q}_o$ pour une pression de refoulement de 300 mmHg sont représentées en fonction de ε, sur la figure (5.6). Ces valeurs augmentent évidemment lorsque le degré d'occlusion diminue. Elles sont comprises entre 10^{-4} et 10^{-2}. Le temps de recirculation du sang dans un circuit extracorporel est de l'ordre de 30 s , donc si la perfusion dure 7 heures la même quantité de sang aura effectué 840 passages dans la pompe et on peut considérer que la majeure partie du sang aura été soumise aux contraintes élevées.

Enfin le débit moyen de la pompe calculé à l'aide de l'équation (5.21) est représenté sur la figure (5.7) en fonction de ε pour plusieurs valeurs de la pression de refoulement normalisée. Pour un tuyau et une vitesse de rotation donnés, le débit chute rapidement lorsque ε dépasse 0,05 à cause de la "fuite" qui se produit sous le galet. Cependant on peut considérer comme acceptable la dépendance du débit sur la pression de refoulement pour $\varepsilon < 10^{-2}$.

5. 4 FORME D'ONDE CONDUISANT AUX CONTRAINTES MINIMA

On va chercher dans cette section s'il existe une forme d'onde qui minimise les contraintes développées dans la zone comprimée. La contrainte maximum au centre de l'onde est donnée par :

$$T_o = \frac{8}{\varepsilon}\left[\frac{\Delta P + 4G^\circ}{\pi\varepsilon F^\circ} - 1\right] \qquad (5.26)$$

La contrainte sera minimum si F° est maximum. Pour cela, il faut que B(z) reste très petit sur une grande longueur soit, pour la partie comprimée,

$$B(\hat{z}) = \varepsilon/2 = \text{constant}$$

Pour des raisons mécaniques, on ne peut pas admettre que la section du tube passe de manière discontinue d'une éllipse très applatie à un cercle. On va donc supposer que $B = \varepsilon/2$ pour $|Z| < S/2$ et que la transition avec la partie non comprimée s'effectue avec la même forme que dans le cas d'un galet circulaire. On trouve dans ce cas, pour la contrainte maximum, en ne gardant que les termes dominants

$$T_o = \frac{\pi}{S}\sqrt{\frac{2D}{\varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{2S}\Delta P \qquad (5.27)$$

pour :

$|Z| < S/2$

La figure (5.5) montre que la contrainte maximum produite par cette onde est environ cinquante fois plus faible que celle produite par un galet circulaire. Le débit dans la zone des contraintes maximum est donné par l'équation :

$$Q_o = -\frac{\pi\varepsilon^2}{32} T_o \qquad (5.28)$$

On peut voir sur la figure (5.6) que ce débit est à peu près deux ordres de grandeur fois plus petit que son homologue pour une pompe à galet circulaire.

5.5 CONCLUSION

Cette analyse confirme le résultat intuitif qu'une pompe à galet produit des contraintes très élevées dans le fluide pompé. Ces contraintes dépassent le seuil critique d'hémolyse et sont sans doute en partie responsables de l'hémolyse observée au cours du pompage. Un résultat inattendu est que la contrainte maximum ne décroit pas uniformément lorsque le jeu de la pompe ε augmente mais passe par un minimum pour $\varepsilon \sim 10^{-3}$. Cependant, lorsque le degré d'occlusion de la pompe augmente ($\varepsilon \to 0$), la fraction du fluide soumise à lacontrainte maximum devient très faible. Donc comme l'importance relative de ces facteurs est mal connue, cette analyse ne permet pas de conclure si une pompe occlusive dégrade plus le sang qu'une pompe non oc-

clusive.

La conception classique avec un galet cylindrique à l'extrémité de chaque bras permet une construction simple mais est loin d'être une solution optimum du point de vue des contraintes dans le fluide. Cette étude montre que si la zone de compression est étendue sur une distance de 2 ou 3 diamètres au lieu d'être concentrée au point de contact du galet, les contraintes sont diminuées dans une très grande proportion ainsi que la fraction de fluide soumise à ces contraintes. Une telle onde peut être produite par exemple par plusieurs petits galets montés en arc de cercle au bout d'un bras unique. (Figure 5.8).

B I B L I O G R A P H I E

1. Barry W.F. "Correlation of Cineradiographic image and pressure tracing of ureteral peristalsis" in Urodynamics ed par J. Boyarsky, C.W. Gottschalk E.A. Tanagho et P.D. Zimsking, Academic Press 1971, p 135-142

2. Barton C., Raynor S. "Peristaltic Flow in tubes" Bull. Math. Biophys. 30 : 663-80, 1968.

3. Benjamin J.A. "Cineradiographic Observation of ureteral Functions in Man and Dog" in Urodynamics (cf. ref. 1) p 81-86, 1971.

4. Bernstein E.F., Gleason L.R. "Factors influencing Hemolysis with roller P Pumps" Surgery, 61, 432-442, 1967.

5. Blackshear P.L., Jr. Dorman F.D., Steinback J.H., Maybach E.J., Singh A. et Collingham R.E. "Shear, Wall Interaction and Hemolysis" Trans Am. Soc. Int. Org., 12, 113-119, 1966.

6. Bluestein M. et Mockros L.F. "Hemolytic Effects of Energy Dissipation in Flowing Blood" Med. and Biol. Engng, 7, 1-16, 1969.

7. Boyarsky S. et Labay P.C. "Ureteral Dimensions and Specifications for Bioengineering Modeling" in Urodynamics (cf. réf. 1) p 163-167.

8. Burns J.C., Parkes T. "Peristaltic Motion" J. Fluid Mechanics, 29, 731-743, 1967.

9. Buthaud H. " The Influences of unsymmetry wall slope and wall motion on peristaltic pumping at small Reynolds number" M.S. Thesis, Dept of Mechanics, Johns Hopkins University, Baltimore U.S.A., Février 1971.

10. Chow T.S. "Peristaltic Transport in a circular cylindrical Pipe" J. Applied Mechanics, 901-905, 1970.

11. Constantinon C.E., Granets J.J. Jr et Owan D.E. "Dynamics of the Upper Urinary Tract" Urologia Internationalis, 29, 249-264, 1974

12. Constantinon C.E., Tsuchida S., Kavaney P.B., Hayman W.P. et Gowan D.E. "Simulated Vesicoureteral Reflux"Urol. Inter., 29, 265-279, 1974

13. Eckstein E.C., "Experimental and Theoretical Pressure Studies of Peristaltic Pumping" M.S. Thesis, Dept of Mechanical Engineering MIT Cambridge U.S.A. 1970.

14. Fahraeus R. et Lindqvist T. 'The Viscosity of Blood in Narrow Capillary Tubes" Am. J. Physiol., 96, 562-568, 1931.

15. Fung Y.C., Yih C.S., (1968) "Peristaltic Transport" J. Applied Mech., 35, 669 -75 See also discussion by Jaffrin M.Y. and Shapiro A.H. followed by authors"closure in J. Applied Mech, 36, 379-381, (1969)

16. Fung Y.C., "Peristaltic Pumping : a Bioengineering Model in Urodynamics (cf. Ref. 1) 179-199, (1971).

17. Hanin M. "The Flow Through a Channel due to transversely Oscillating Walls" Israel J. Technology, 6, 67-71, (1968)

18. Hodges P.C. Ir, Carduzo R., Thevenet A. et Lillehel C.W. "Comparison of Relative merits of occlusive and non occlusive pumps for open-heart surgery" J. Thorac. Surgery, 36, 470-478, 1958

19. Jaffrin M.Y. "Inertia and Streamline Curvature Effects" J. Intern. Eng. Science, 11, 681-699, (1973).

20. Jaffrin M.Y., Shapiro A.H. "Peristaltic Pumping" Annual Review of Fluid Mechanics, Vol 3, Annual Reviews Inc. Palo Alto, (1971).

21. Jaffrin M.Y. et Meginniss "The Hydrodynamics of Roller Pumps and their Implication to Hemolysis" Fluid Mechanics Laboratory Report 71-1, MIT Cambridge, February 1971.

22. Jaffrin M.Y., Weinberg S. et Shapiro A.H. "A Simple Model of Ureteral Peristalsis " Proc. of the 23rd ACEMB, p 135, Washington D.C., November 15, 1970.

23. Kill F. "The function of the Ureter and the Renal Pelvis" Philadelphia Saunders 1957.

24. Lardner T.J. et Shack W.J. "Cilia Transport" 1970

25. Lathan T.W., et Shapiro A.H. "On peristaltic Pumping" Proc. 19th Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology, 1966, p 147

26. Lew H.S., Fung Y.C. et Lowenstein C.B. "Peristaltic Carrying and mixcing of chyme in the small intestine" J. Biomechanics, 4, 297-315, (1971).

27. Li C.H. "Particle trajectories in peristaltic motion" Report FTAS/TR-71-58. Case Western Reserve University Cleveland, Ohio.

28. Li C.H. "Peristaltic Transport in Circular Cylindrical Tubes" J. Biomechanics 3, 513-523, (1970).

29. Lykoudis P. "The Ureter as a Peristaltic Pump" in Urodynamics (cf. ref. 1) 200-216, 1971.

30. Lykoudis P. et Roos R. "The Fluid Mechanics of the Ureter from a Lubrification Theory Point of View" J. Fluid Mech., 43, 661-674, 1970

31. Mittra T.K. et Prasad S.N. "On the Influence of Wall Properties and Poiseuille Flow in Peristalsis to be published in J. Biomechanics

32. Nevaril C.G., Hellums J.D., Alfrey C.P. , Ir, et Lynch E.C "Physical Effects in Red Blood Cell Trauma" Aich E, J., 15, 707-711, (1969).

33. Ostrach S. "Basic Engineering Principles of Ureteral Flow" in Urodynamics (cf. Ref 1.) p 168-177

34. Rooney J.A. "Hemolysis near an Ultrasonic Pulsating Gas Bubble" Science, 169, 869, (1970)

35. Shapiro A.H., "Pumping and Retrograde Diffusion in Peristaltic Waves" Proc.Workshop Ureteral Reflux Children, Nat. Acad. Science Washington D.C., (1967).

36. Shapiro A.H., Jaffrin M.Y. et Weinberg J.L. "Peristaltic Pumping with Long Wavelength at Low Reynolds Numbers" J. Fluid Mech., 37, 799-825 (1969).

37. Shapiro A.H., Jaffrin M.Y., et Weinberg J.L."Reflux and Trapping Phenomena in Peristaltic Pumping" Proc. of 22rd Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology, (1969) paper 18-11

38. Tanagho E.A. et Meyers F.H. "Ureteral Peristaltic Activity" in Urodynamics (cf. Ref 1) p 120-124 (1971).

39. Tong P. et Vawter D. "An Analysis of Peristaltic Pumping" J. Applied Mechanics, (1972).

40. Weinberg S.L., Eckstein E.C. et Shapiro A.H. "An experimental Study of peristaltic pumping" J. Fluid Mechanics, 49, 267-479, (1971).

41. Weinberg S.L., Jaffrin M.Y. et Shapiro A.H. "Hydrodynamical Model of ureteral function" in Urodynamics (cf. Ref. 1) p 217-232, (1971).

42. Williams A.R., Hughes D.E., et Nyborg W.L. "Hemolysis near a transversely oscillating wire" Science, 169, 871, (1970).

43. Wormesley J.R. "Oscillatory Motion of a viscous fluid liquid in a thin-walled elastic tube : the linear approximation for long waves" Philosophical Magazine, 7, 199-221, (1955).

44. Yin F.C. et Fung Y.C. "Comparison of theory and experiment in peristaltic transport" J. Fluid Mechanics, 4, 93-112, (1971).

45. Yin F., Fung Y.C. "Peristaltic waves in circular cylindrical tubes" J. Applied Mechanics, 37, 568, (1969).

46. Zien T.F., Ostrach S. " A longwave approximation to peristaltic motion" J. Biomechanics, 3, 63-75, (1970).

47. Ross S.M. et Corrsin S. "Results of an analytical model of mucociliary pumping" J. Applied Physiology, 37, 333-340, (1974).

LISTE DES SYMBOLES (Chapitre 1-4)

a	demi-largeur du conduit
b	amplitude de l'onde sinusoïdale
c	célérité de l'onde
d	diamètre de l'uretère
h	distance de la paroi à l'axe du canal
$H = h/a$	
L	longueur du conduit
L_1, L_2	longueurs des phases de l'onde uretérale
p	Pression
$P = p(2\pi a^2/\lambda\mu c)$	pression normalisée
q	débit
$Q = q/ac$	débit normalisé
$\overline{Q}_i$	débit dans la zone i de l'onde uretérale
$\overline{Q}_o$	débit moyen normalisé à l'ordre zéro
$\overline{Q}$	débit normalisé dans le repère lié à l'onde
$\overline{Q}^{(2)}$	débit moyen à l'ordre 2
r	coordonnée radiale
$R = r/a$	
t	variable temporelle
T	période
u	composante longitudinale de la vitesse
U	vitesse longitudinale normalisée
v	composante transversale de la vitesse
V	vitesse transversale normalisée
x	abscisse
y	ordonnée

$\alpha = 2\pi a/\lambda$ nombre d'onde

$\delta = \eta/H$ $\eta = y/a$

$\Delta P_{o\lambda}$ gradient de pression moyen normalisé

ε petit paramètre défini par l'équation 2.36

λ longueur d'onde

ν viscosité cinématique du fluide

$\xi = 2\pi x/\lambda$ abscisse normalisée

$\tau = 2\pi ct/\lambda$ variable temporelle normalisée

$\phi = b/a$ paramètre d'occlusion

ϕ_2 paramètre de déplacement longitudinal

$\chi = \psi/ac$

χ_o solution d'ordre zéro

χ_1, χ_2 coefficients des puissances de R_e dans le développement de

$\tilde{\chi}_2$ coefficient de α^2 dans le développement de χ

ψ fonction de courant

Chapitre 5

a,b demi-axes de la section transversale du tuyau

$A = a/R$

$B = b/R$

$P = Rp/\mu c$

R rayon nominal du tuyau

$T = \tau R/\mu c$ contrainte normalisée

w composante longitudinale de la vitesse

$W = w/R$

x,y coordonnées transversales

$X = x/R$, $Y = y/R$

z	coordonnée longitudinale dans le repère fixe
$Z = z/R$	
$\hat{Z}$	coordonnée longitudinale dans le repère mobile
$\eta = 2B$	
$\varepsilon = \eta$ minimum	paramètre d'occlusion
μ	coefficient de viscosité
τ	contrainte

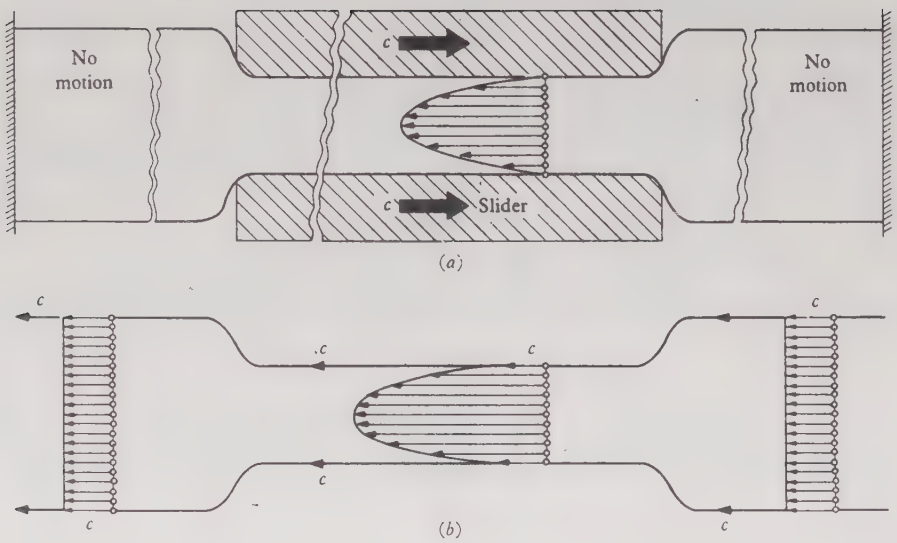


Fig. 1.1 : Illustration du mécanisme de transport péristaltique

a) en se plaçant dans un repère fixe dans lequel l'écoulement est instationnaire

b) en se plaçant dans un repère lié à l'onde dans lequel l'écoulement apparaît comme stationnaire.

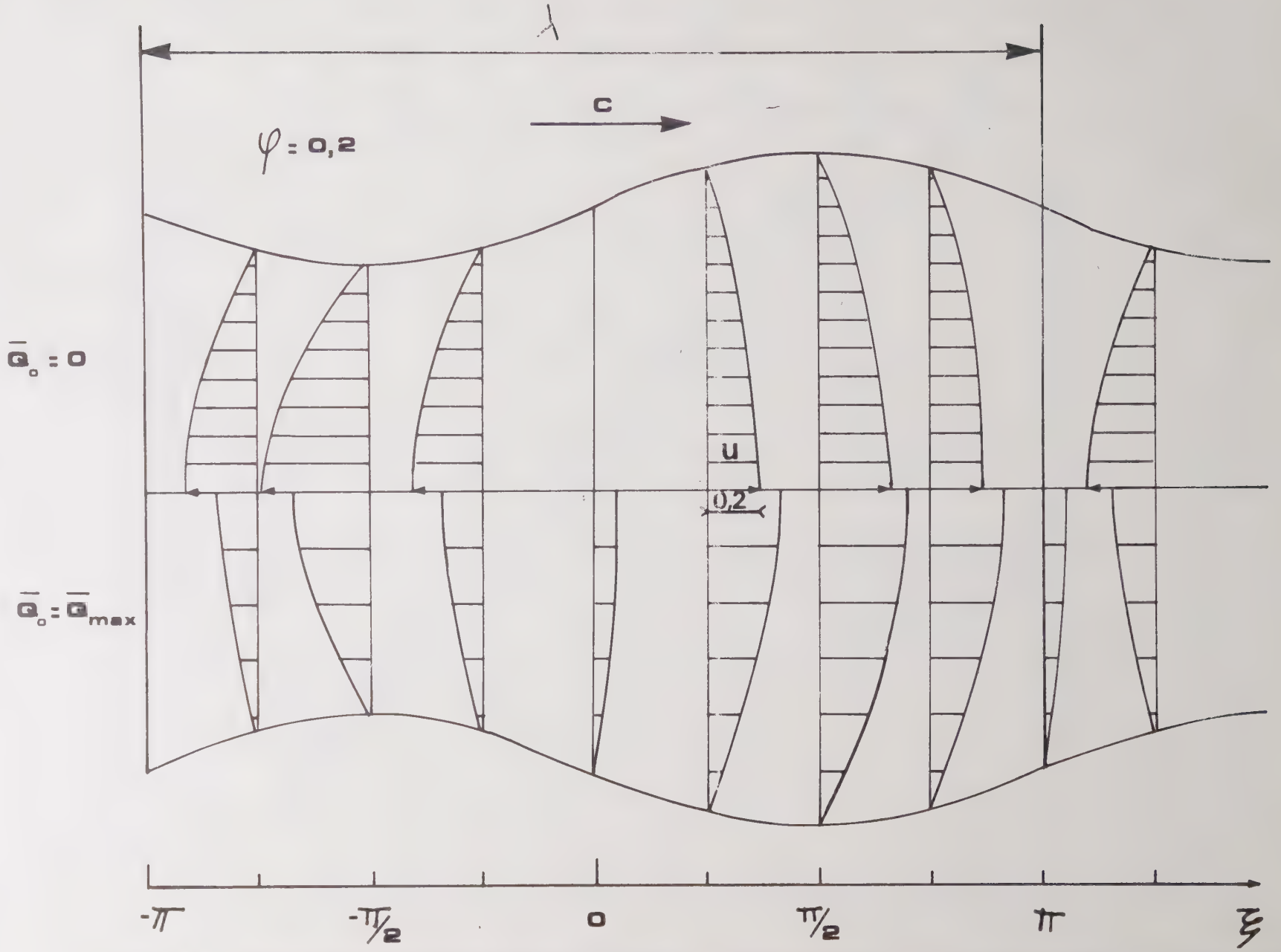


Fig. 2.1 : Distribution longitudinale des vitesses normalisées dans le cas d'un conduit bidimensionnel pour un débit nul et pour un débit égal au débit maximum respectivement.

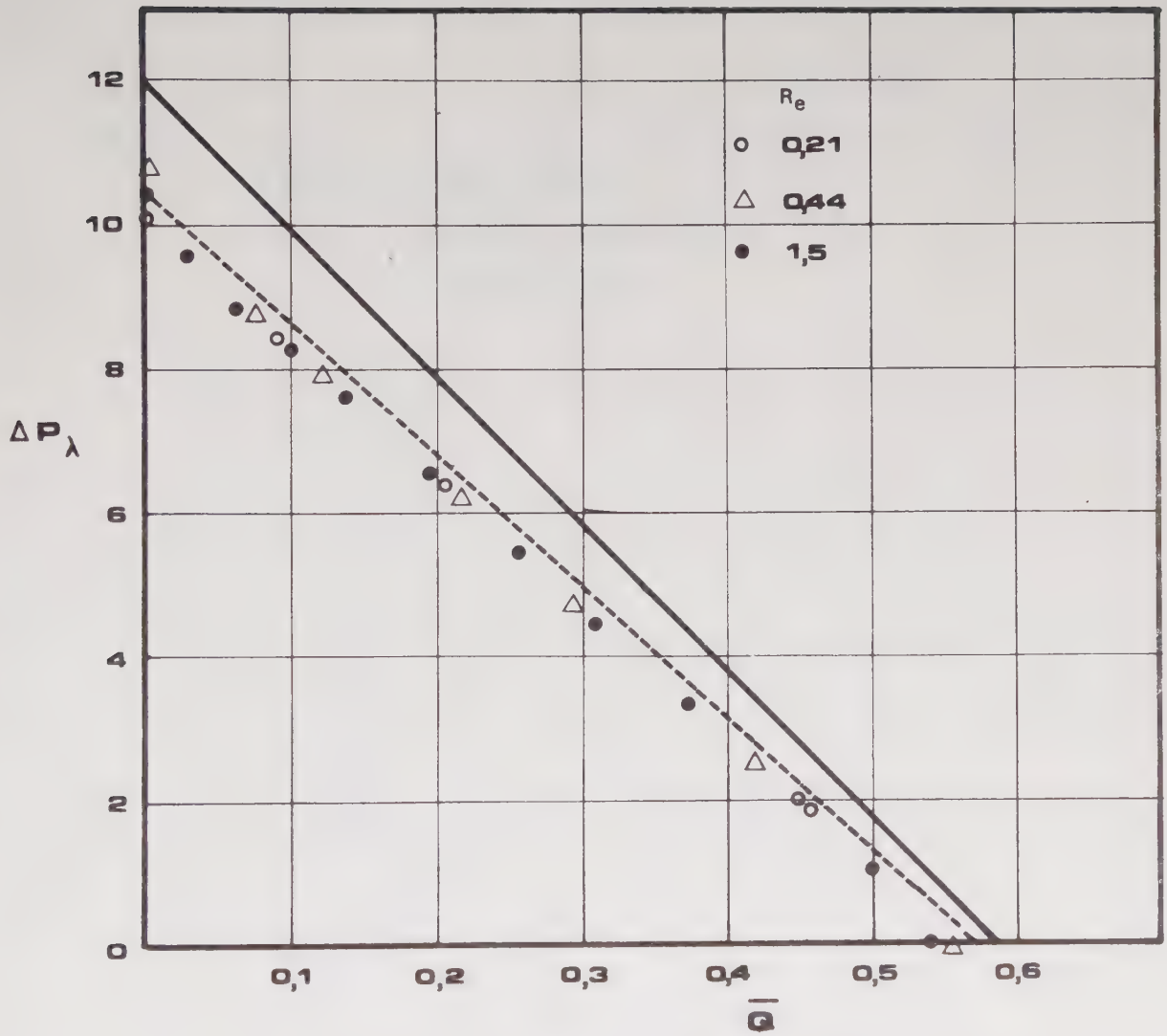


Fig. 2.2 : Caractéristique pression-débit aux faibles nombres de Reynolds pour $\varphi = 0,7$
——— Théorie bidimensionnelle pour $R_e = \alpha = 0$;
------ Théorie bidimensionnelle corrigée par les effets de bord ;
o △ ● Résultats expérimentaux de Weinberg et coll (40).

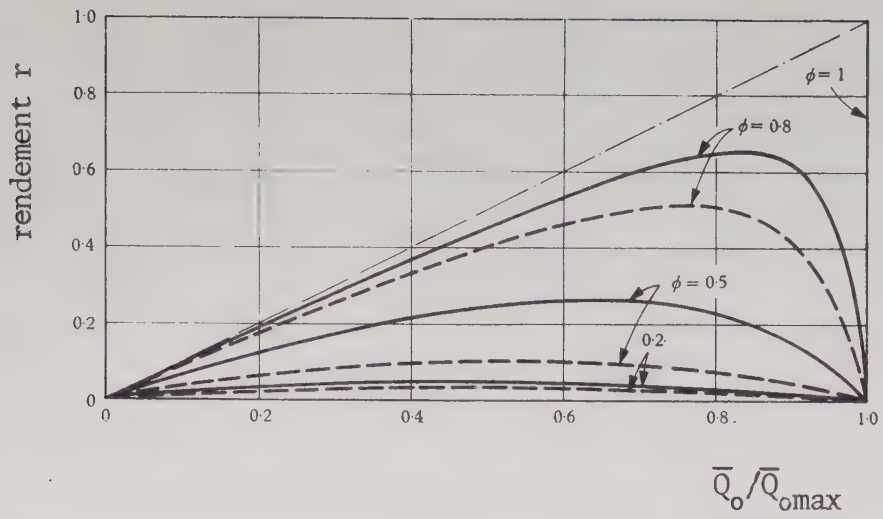


Fig. 2.3 : Rendement du pompage en fonction du débit normalisé par rapport au débit maximum

——— cas bidimensionnel plan ;

------ cas axisymmétrique.

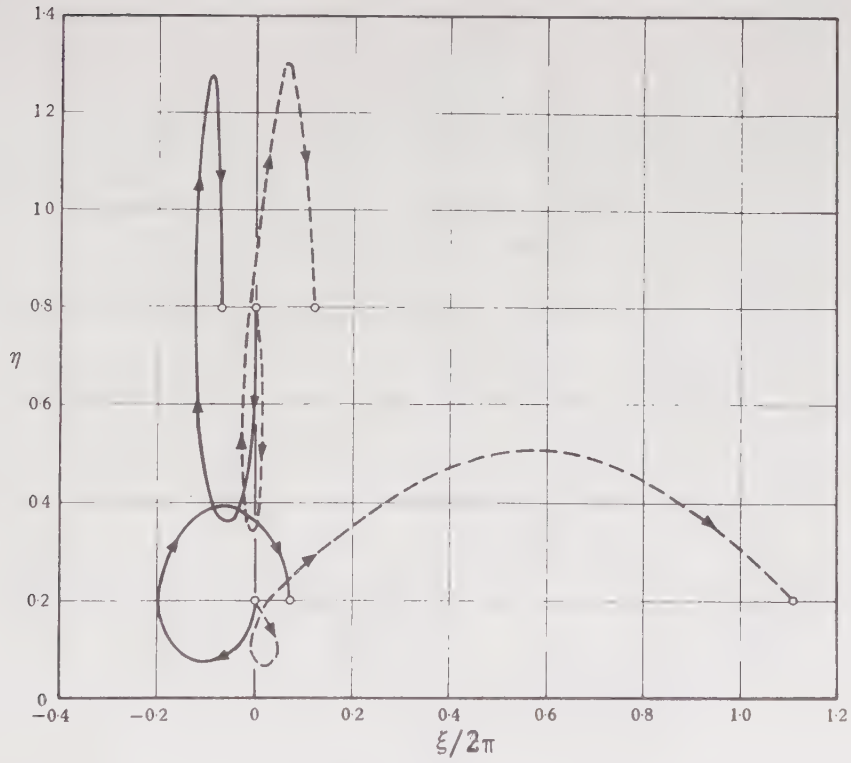


Fig. 2.4 : Exemples de trajectoires de particules dans le cas plan pour ϕ = 0,5

——— pour $\overline{Q}_o = 0$;

---- pour $\overline{Q}_o = \overline{Q}_{omax}$

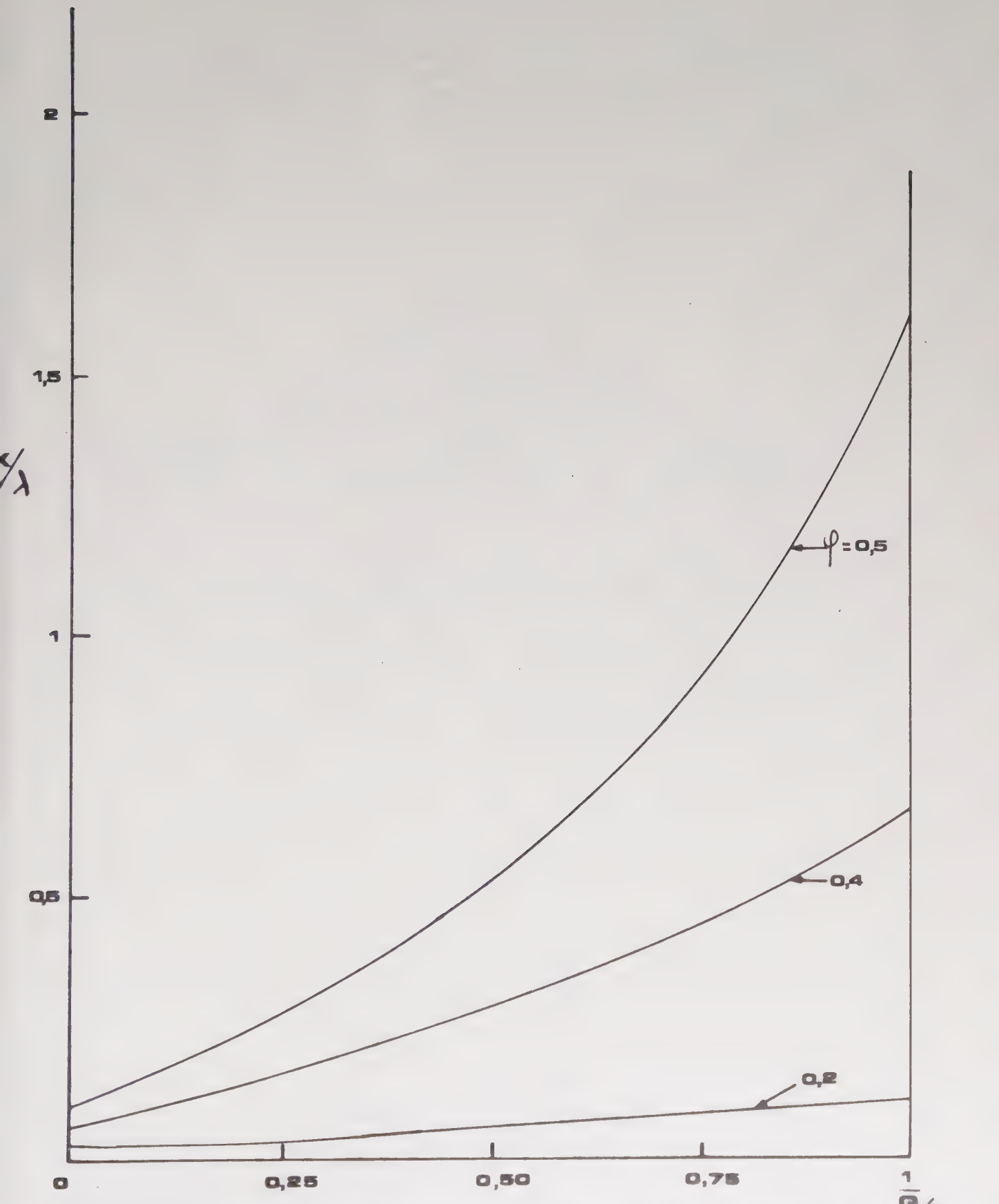


Fig. 2.5 : Déplacement des particules sur l'axe normalisé par rapport à la longueur d'onde en fonction du débit.

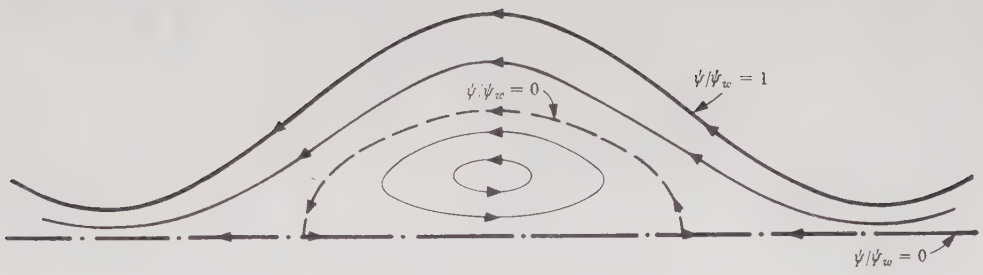


Fig. 2.6 : Piégeage - Schéma des lignes de courant vues dans un repère lié à l'onde.

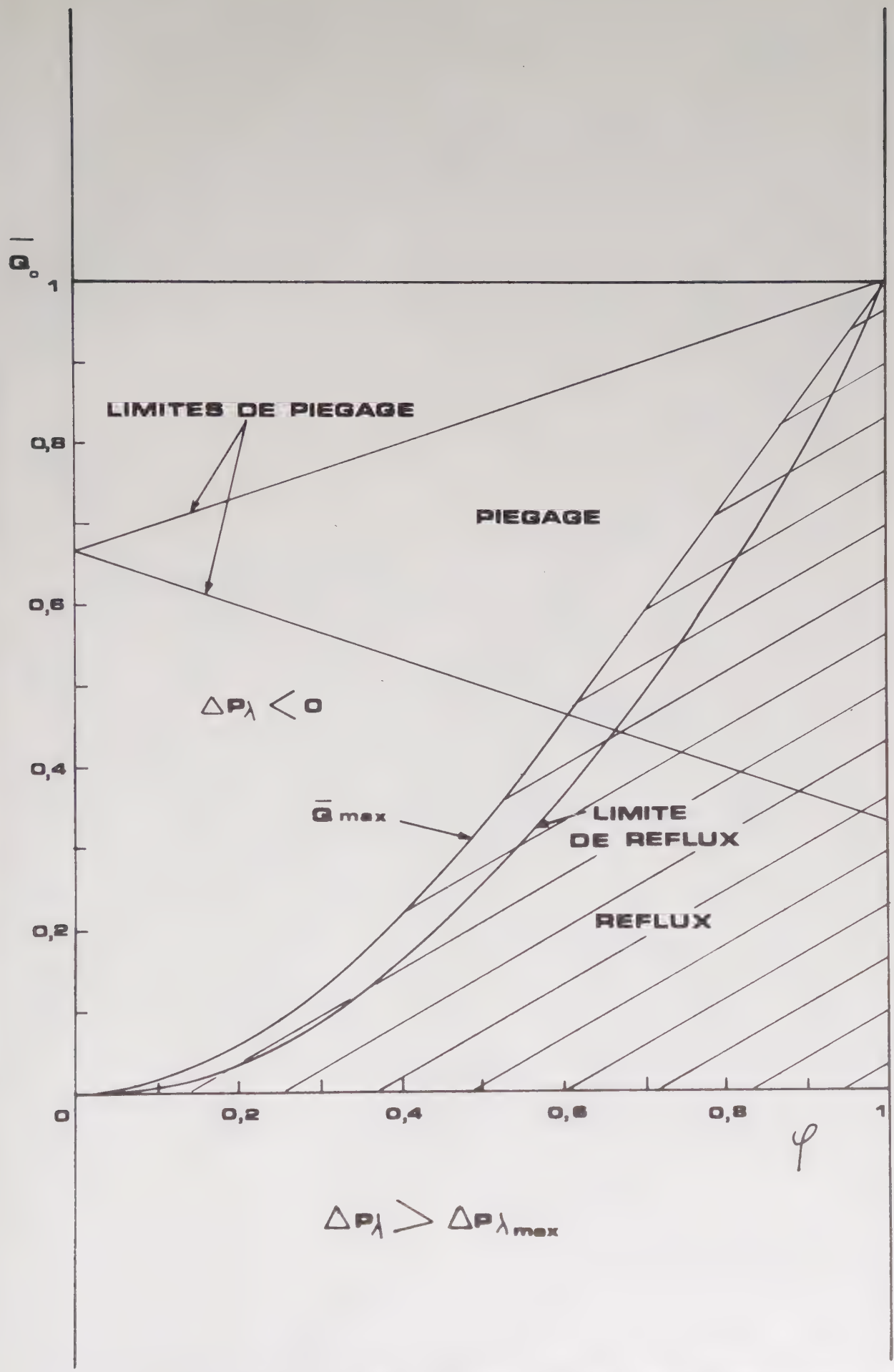


Fig. 2.7 : Résumé graphique des différents régimes, cas bidimensionnel plan. Les hachures délimitent le domaine de pompage.

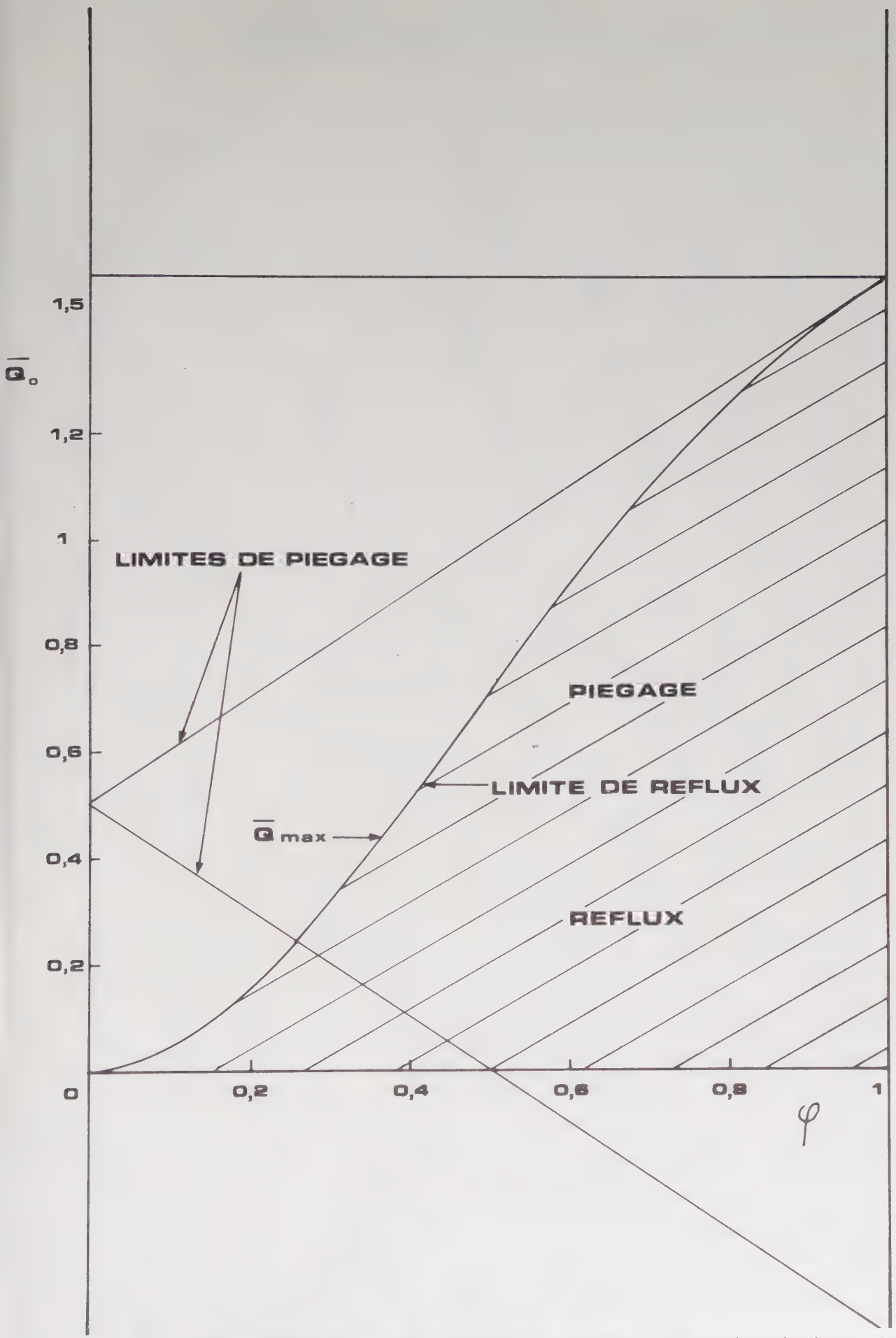
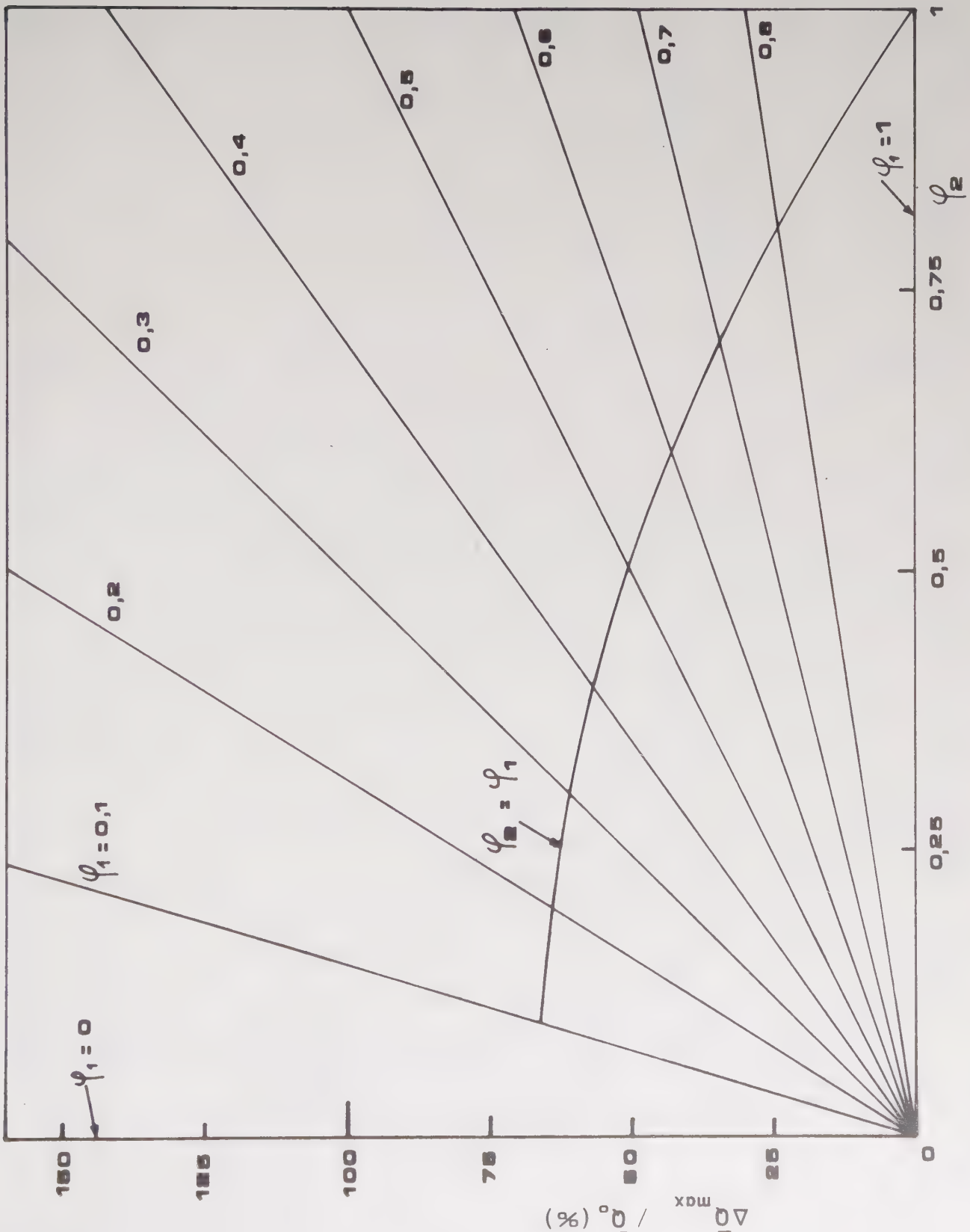


Fig. 2.8 : Résumé graphique des différents régimes, cas axisymétrique. Les hachures délimitent le domaine de pompage.

Fig. 2.9 : Accroissement du débit maximum dû aux ondes péristaltiques longitudinales pour f = 90° en fonction de φ_1 et φ_2.



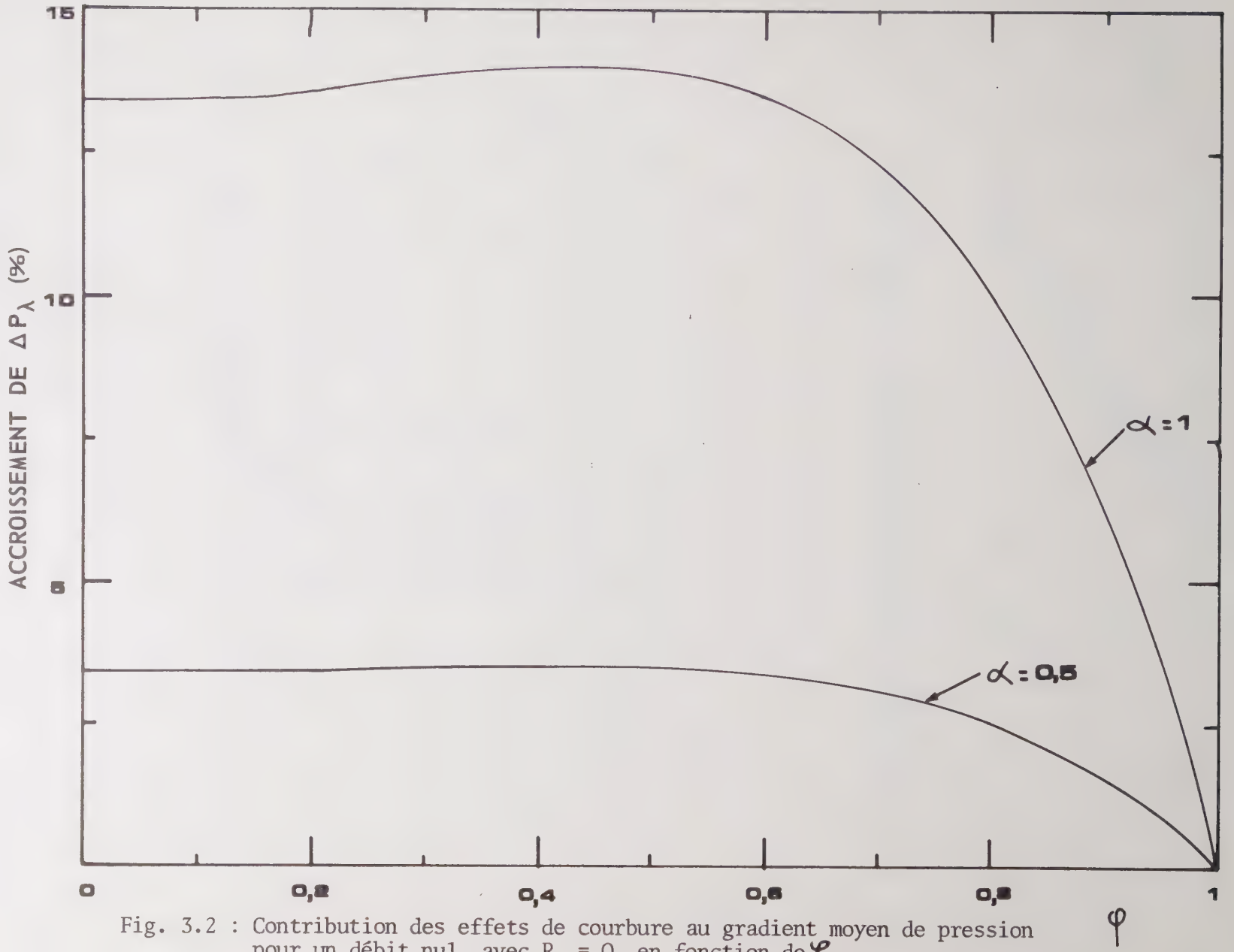


Fig. 3.2 : Contribution des effets de courbure au gradient moyen de pression pour un débit nul, avec $R_e = 0$, en fonction de φ.

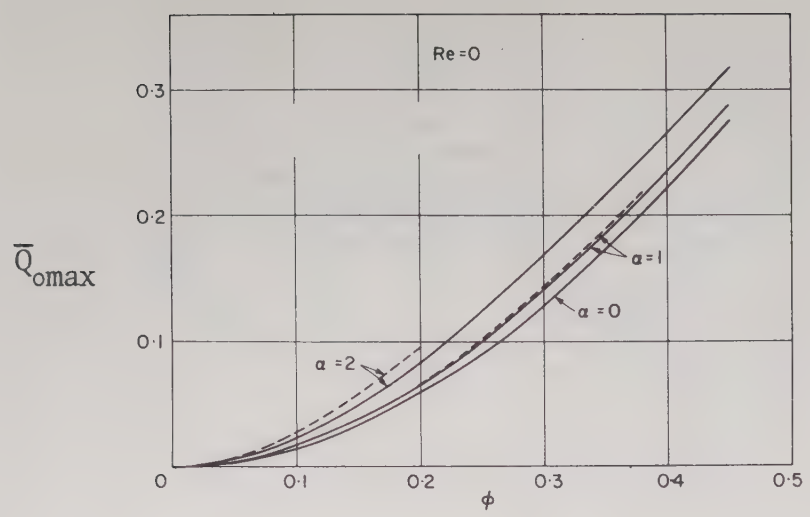


Fig. 3.1 : Comparaison du résultat de l'équation (3.10) (trait plein) avec la solution de Burns et Parkes (8) (pointillé)

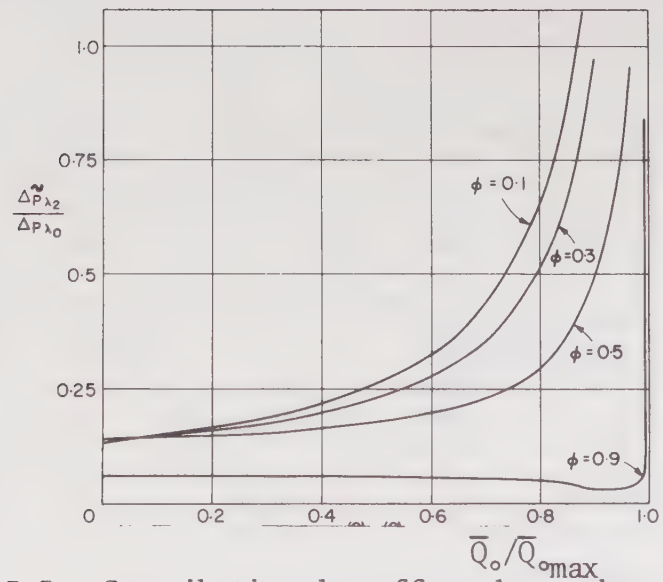


Fig. 3.3 : Contribution des effets de courbure au gradient de pression moyen en fonction du débit.

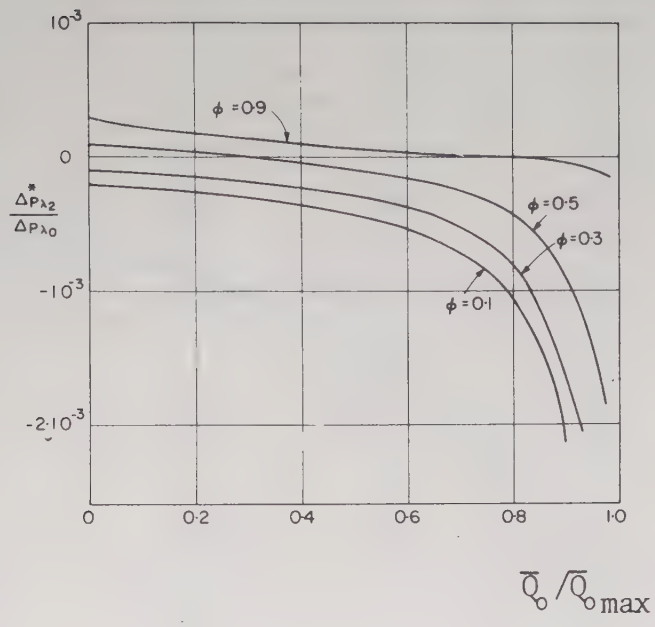


Fig. 3.4 : Contribution des effets d'inertie au gradient de pression moyen en fonction du débit.

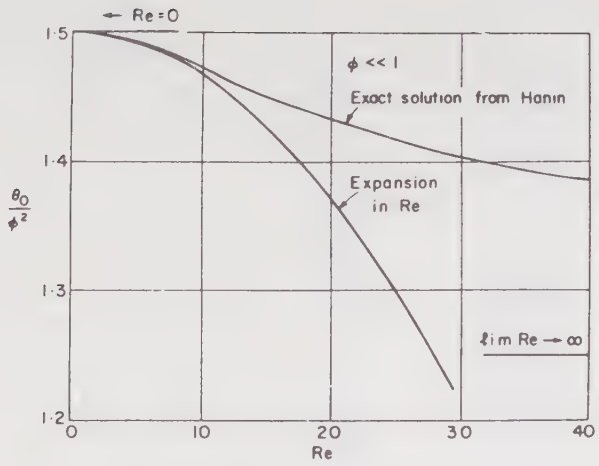


Fig. 3.5 : Variation du débit maximum aux faibles valeurs de ϕ avec le nombre de Reynolds. Comparaison avec la solution de Hanin (17).

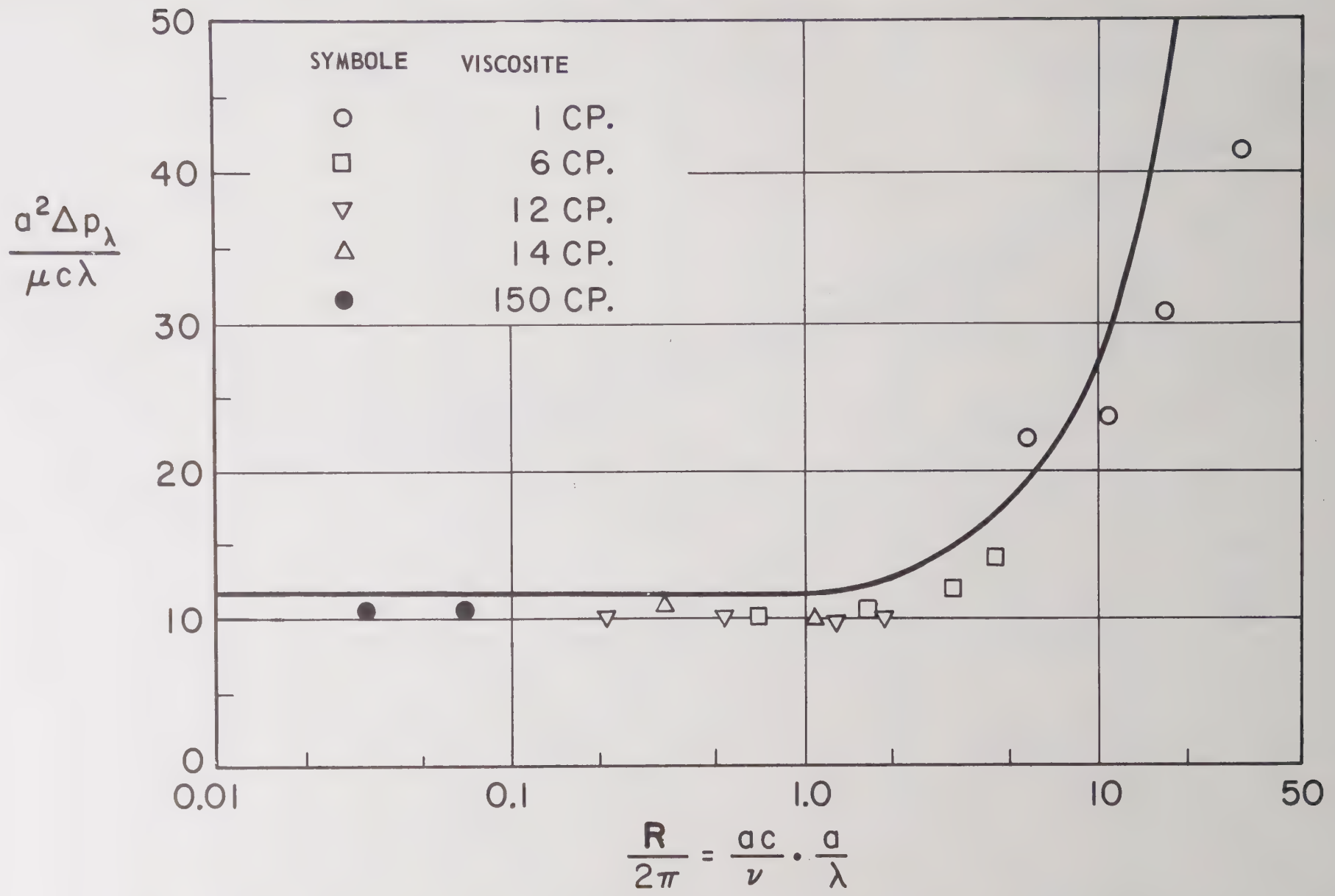


Fig. 3.6 : Variation du gradient de pression maximum avec le nombre de Reynolds et comparaison avec les résultats expérimentaux de Eckstein (13).

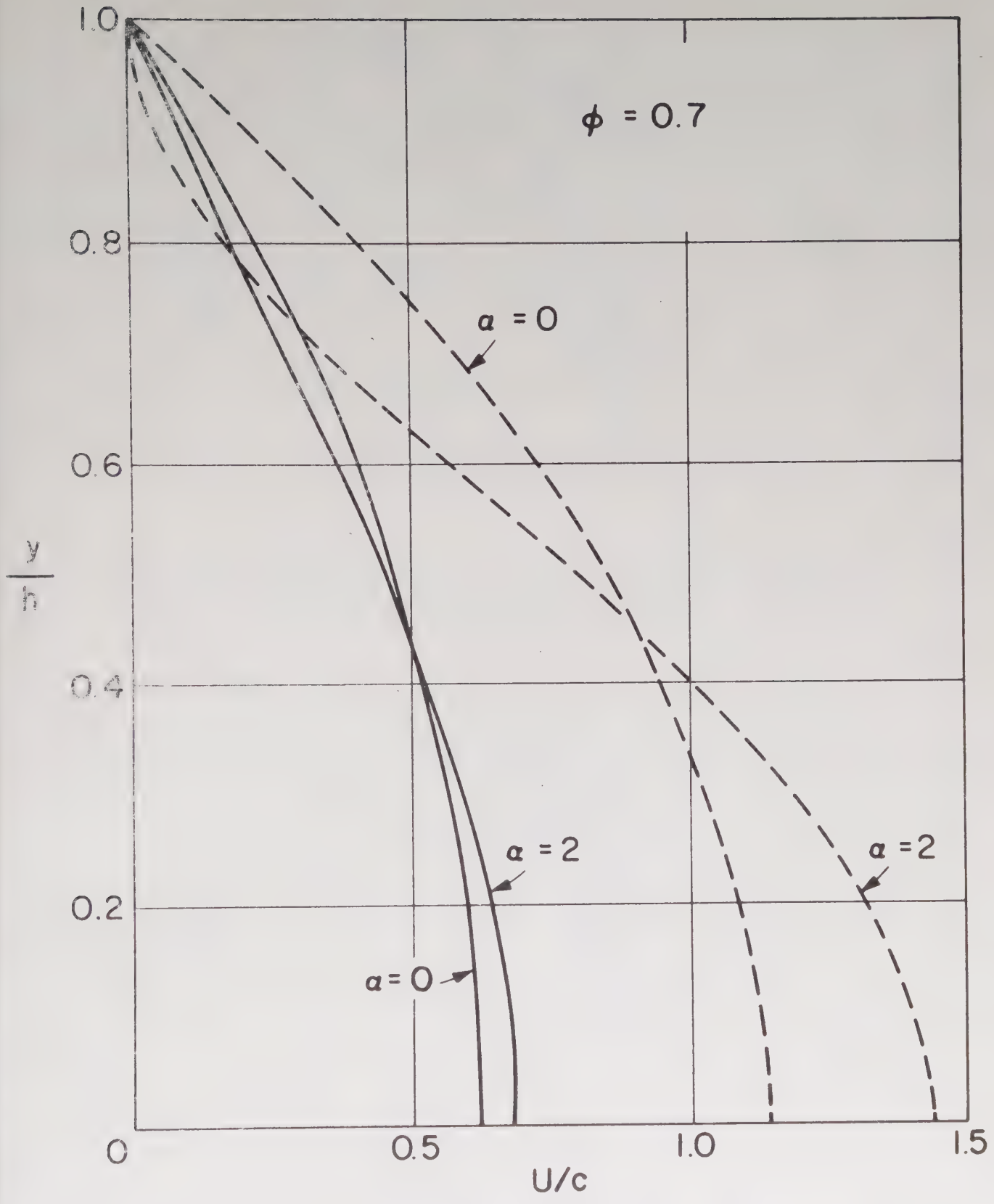


Fig. 3.7 : Profils de vitesse maximum ——— pour un débit nul
------ pour le débit maximum

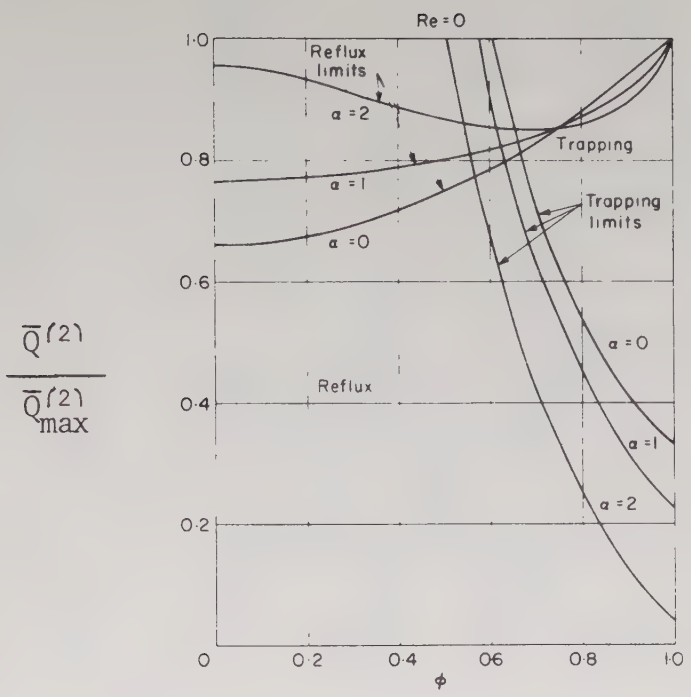


Fig. 3.8 : Résumé graphique des effets de courbure sur les régimes de reflux et de piégeage, à l'ordre α^2

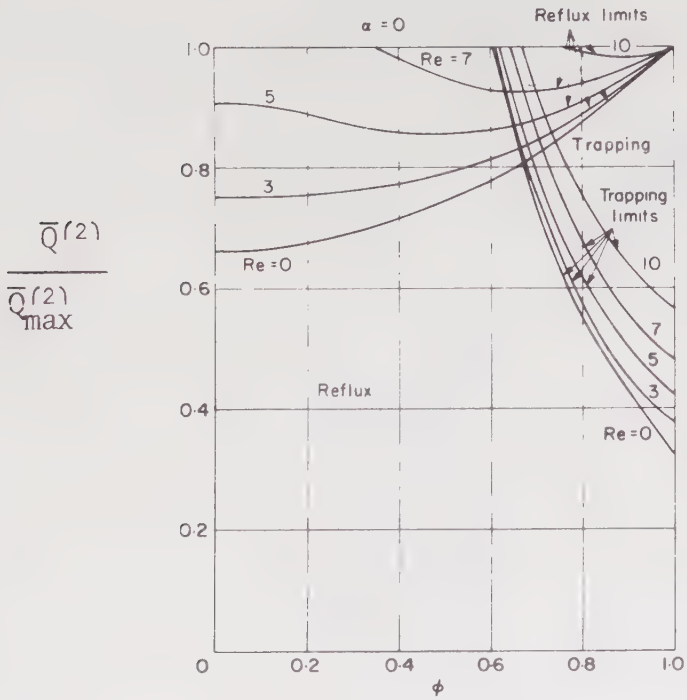


Fig. 3.9 : Résumé graphique des effets d'inertie sur les régimes de reflux et de piégeage, à l'ordre R_e^2

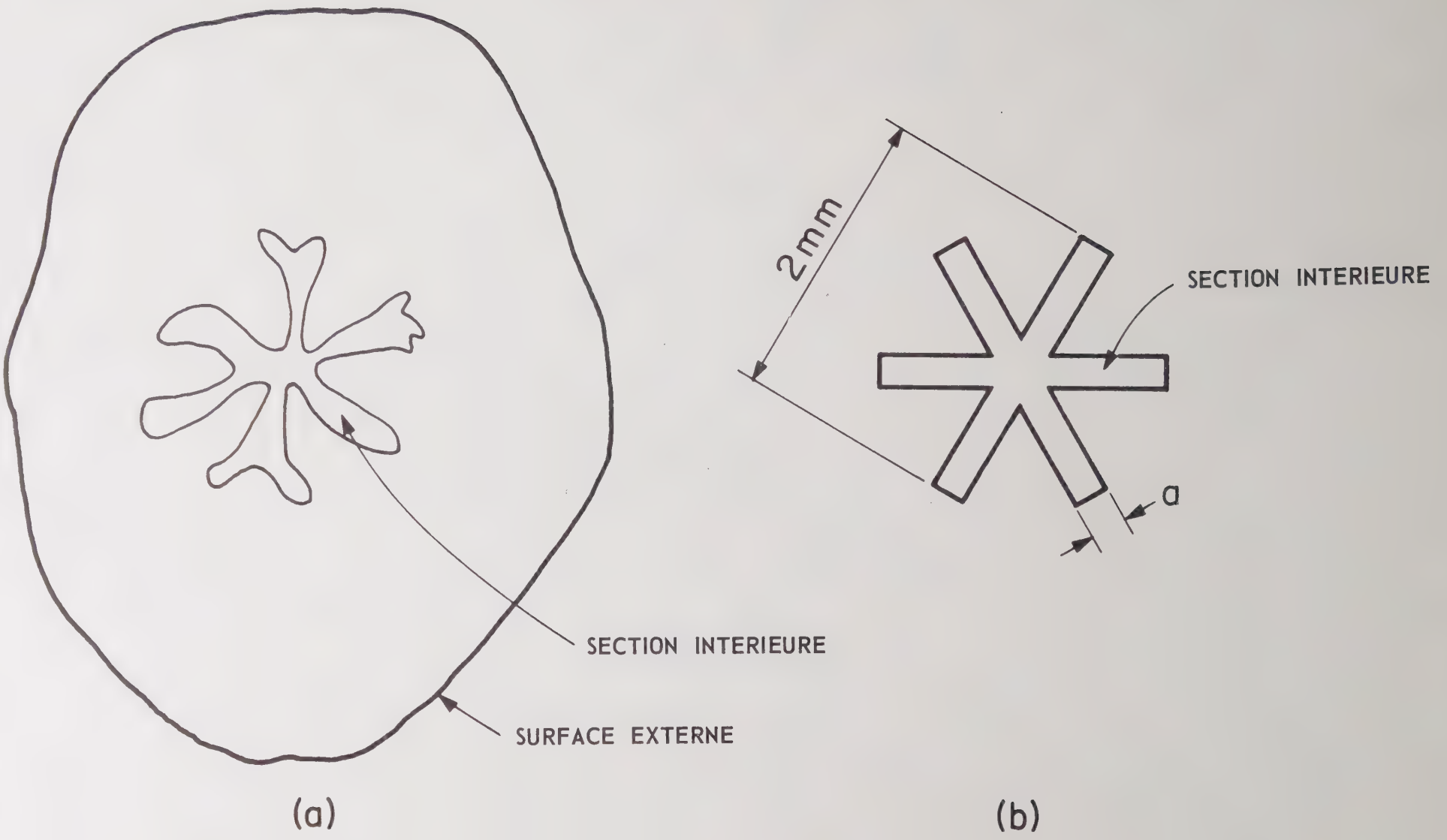


Fig. 4.1 : a) Section transversale de l'uretère contracté
b) Schématisation de cette section utilisée dans les calculs.

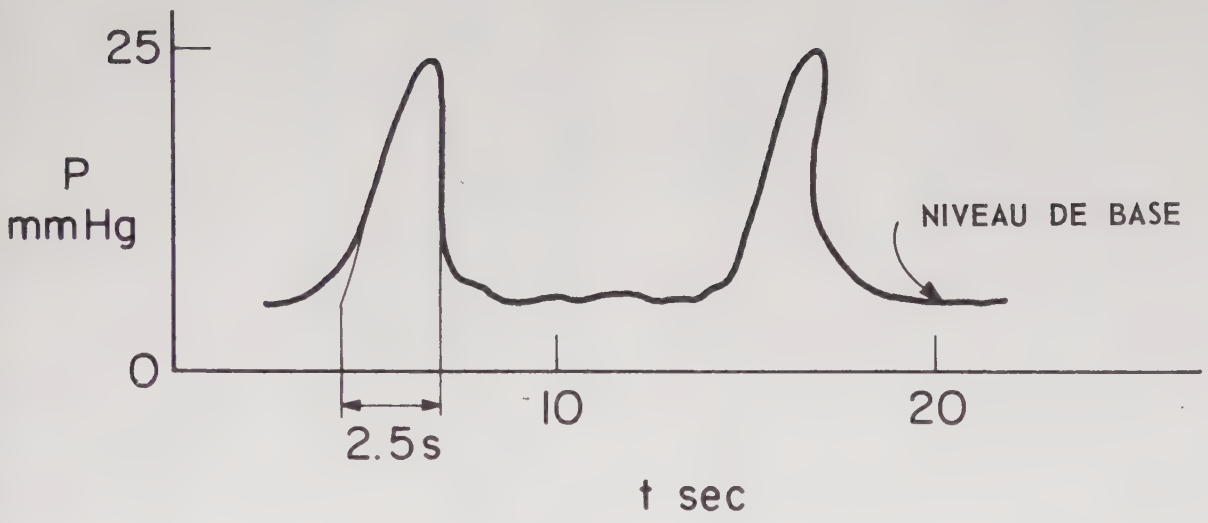


Fig. 4.2 : Enregistrements de la pression dans l'uretère en fonction du temps d'après Kiil (23) .

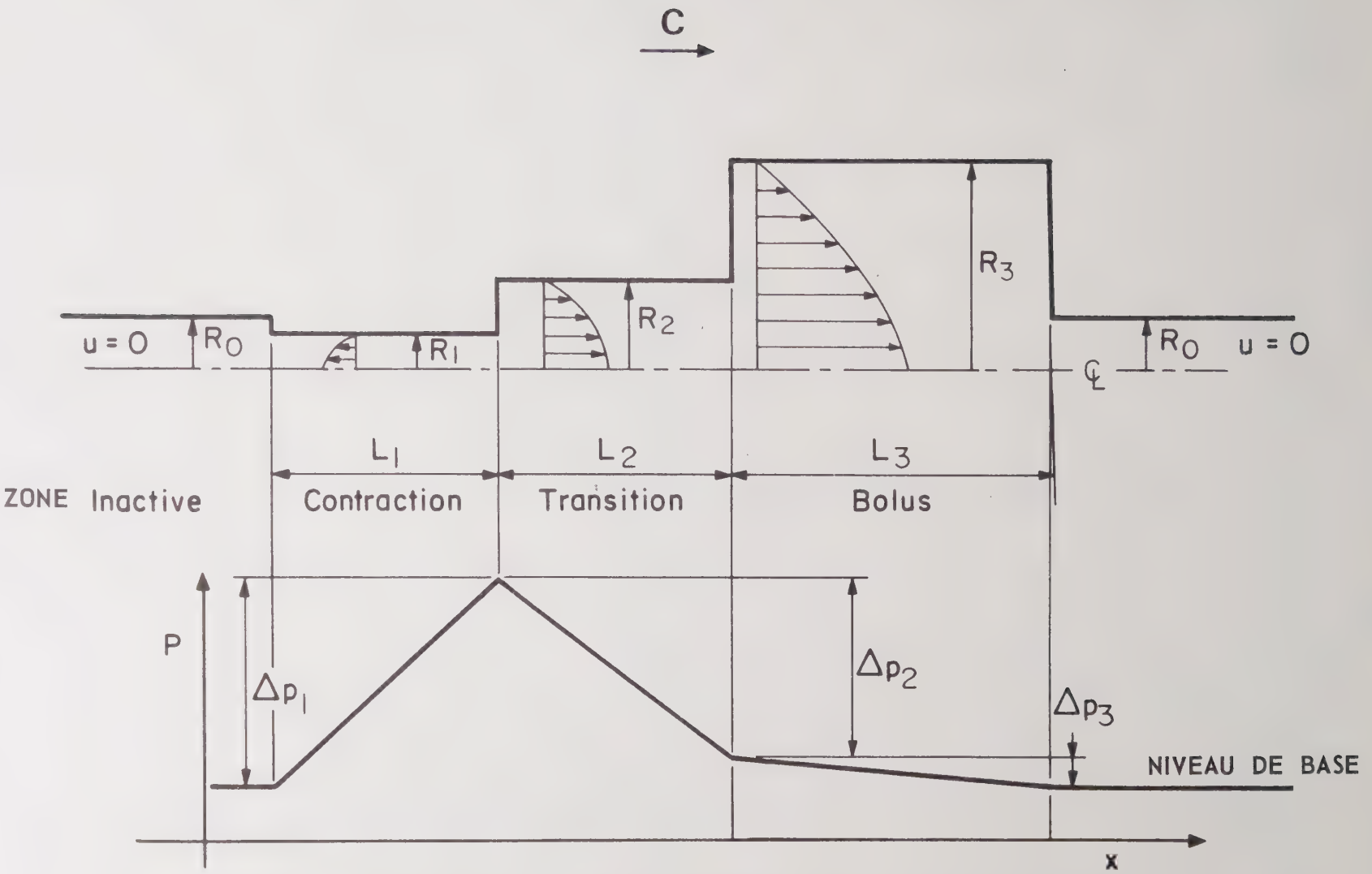


Fig. 4.3 : Modèle en échelon utilisé pour schématiser l'onde péristaltique. En dessous, variation correspondante de la pression dans le fluide en fonction de la distance.

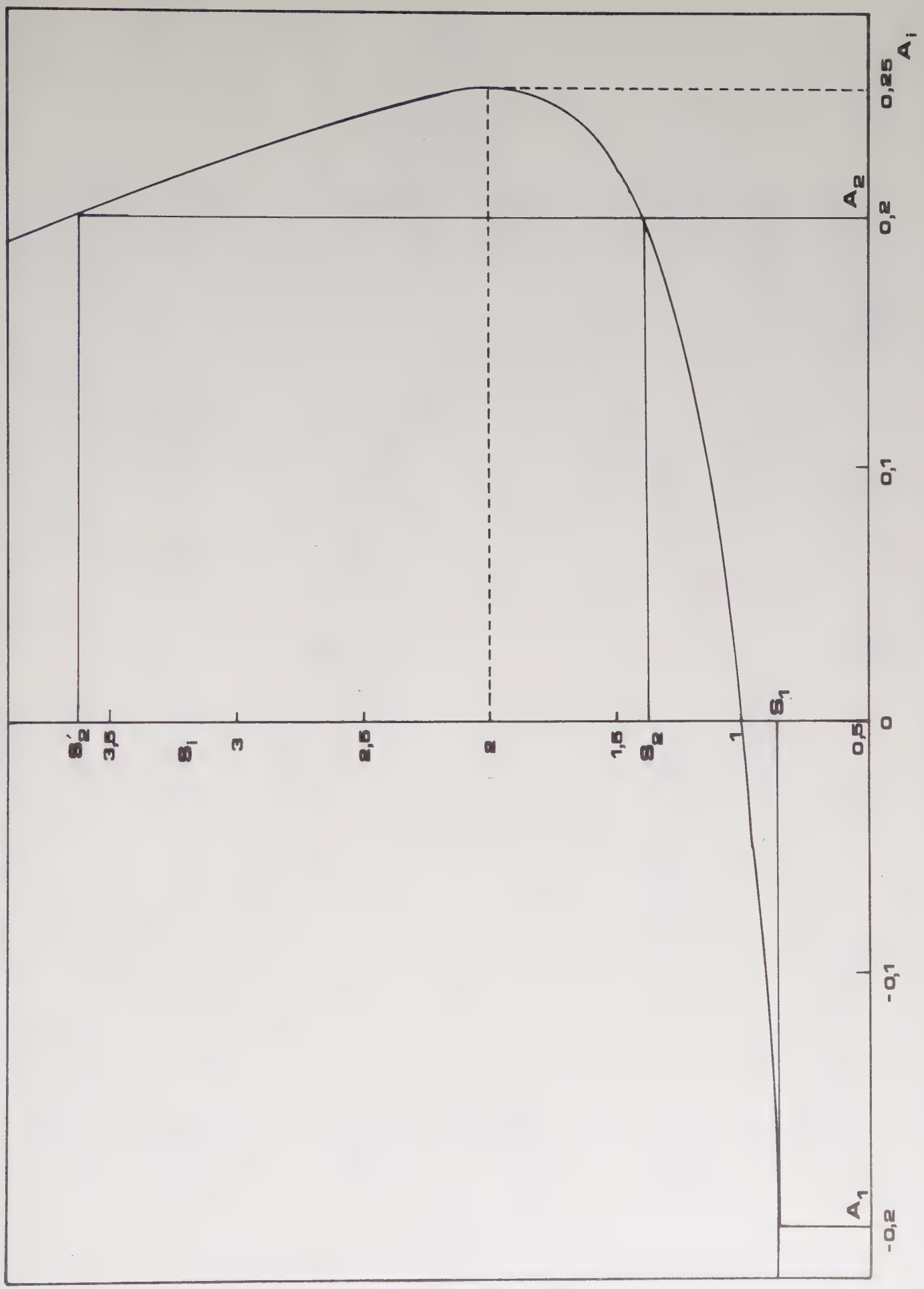


Fig. 4.4 : Variation des aires normalisées des sections transversales de l'uretère supposé circulaire, en fonction des paramètres A_i.

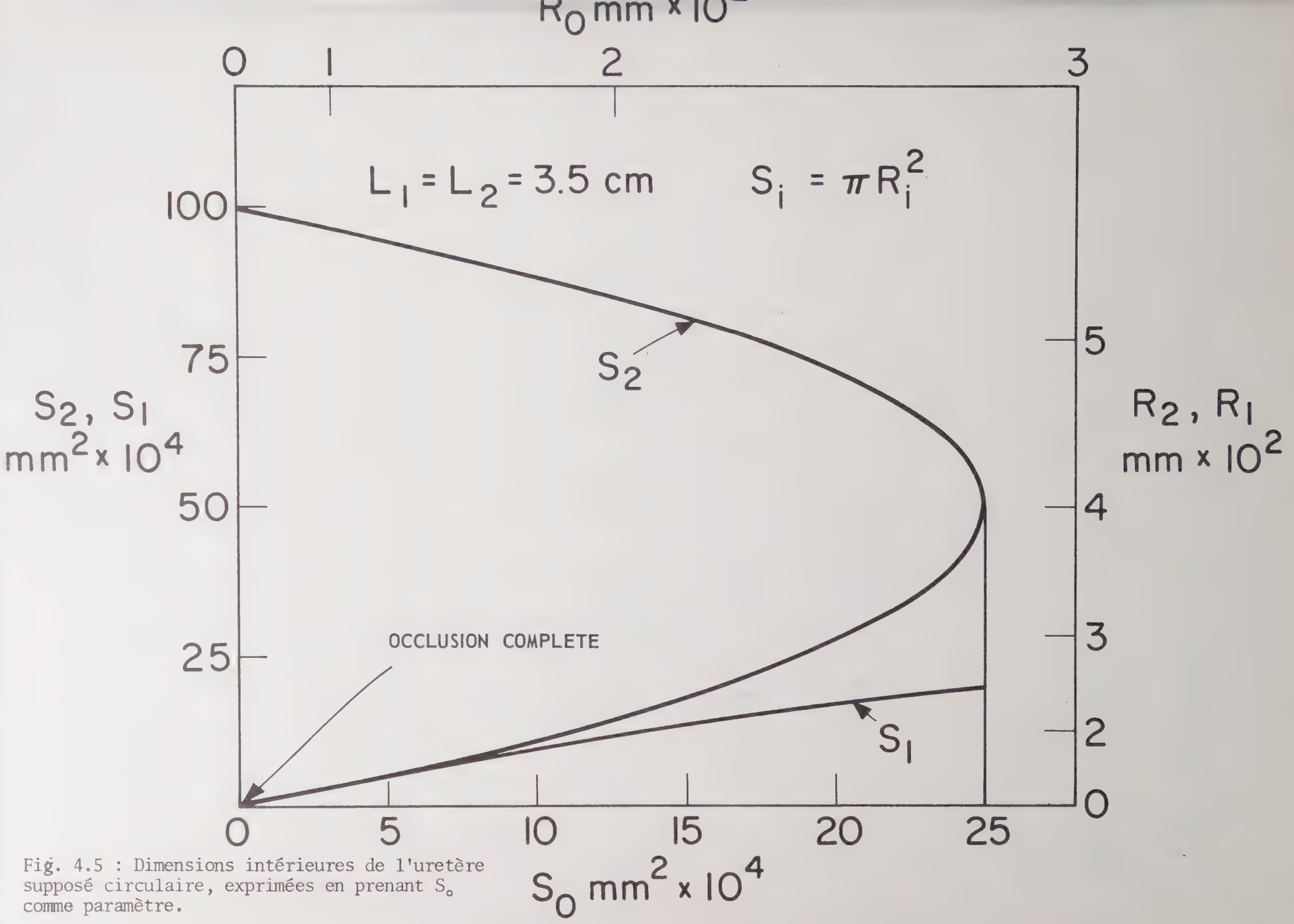


Fig. 4.5 : Dimensions intérieures de l'uretère supposé circulaire, exprimées en prenant S_o comme paramètre.

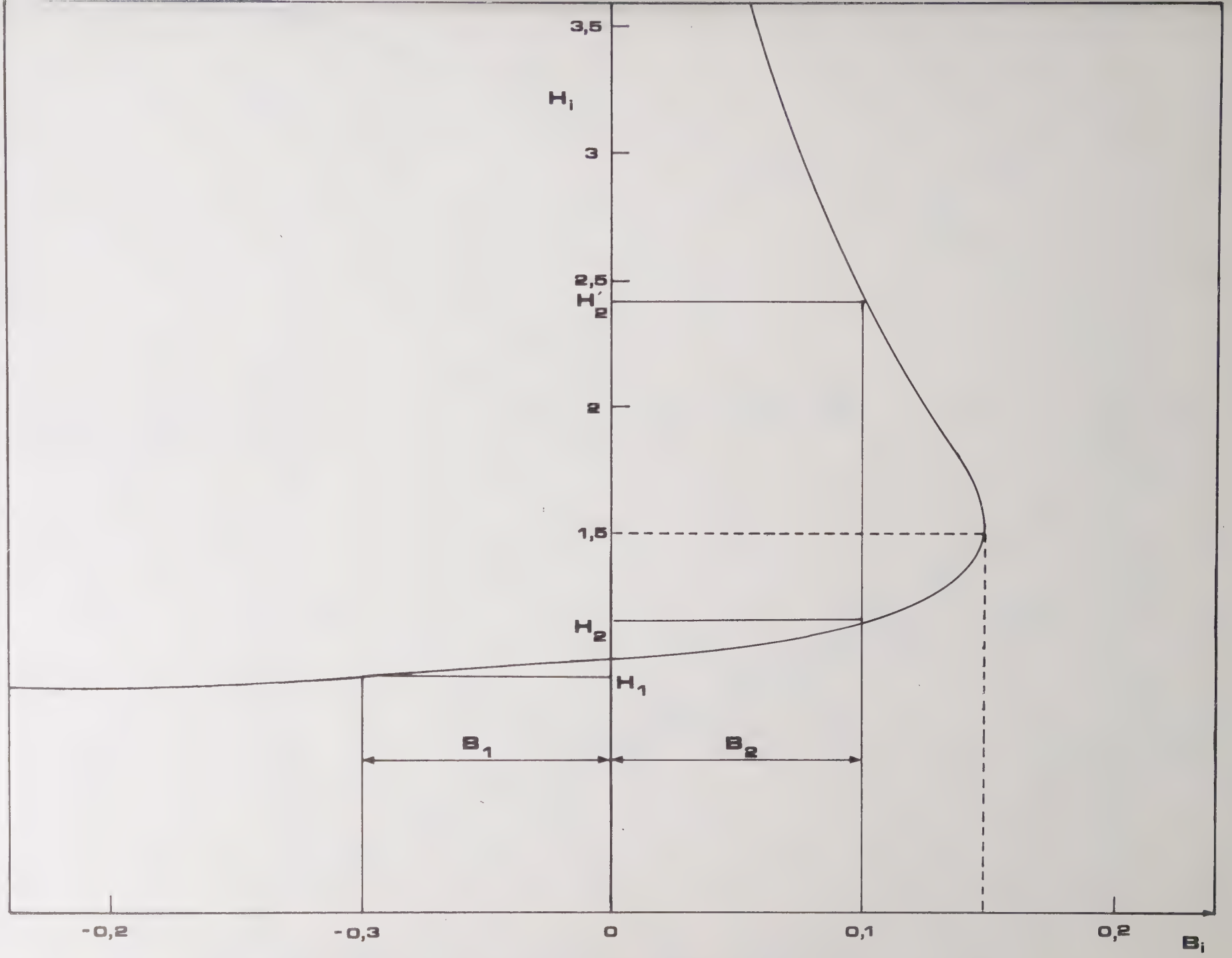


Fig. 4.6 : Variation des largeurs H_i des canaux en fonction des paramètres B_i.

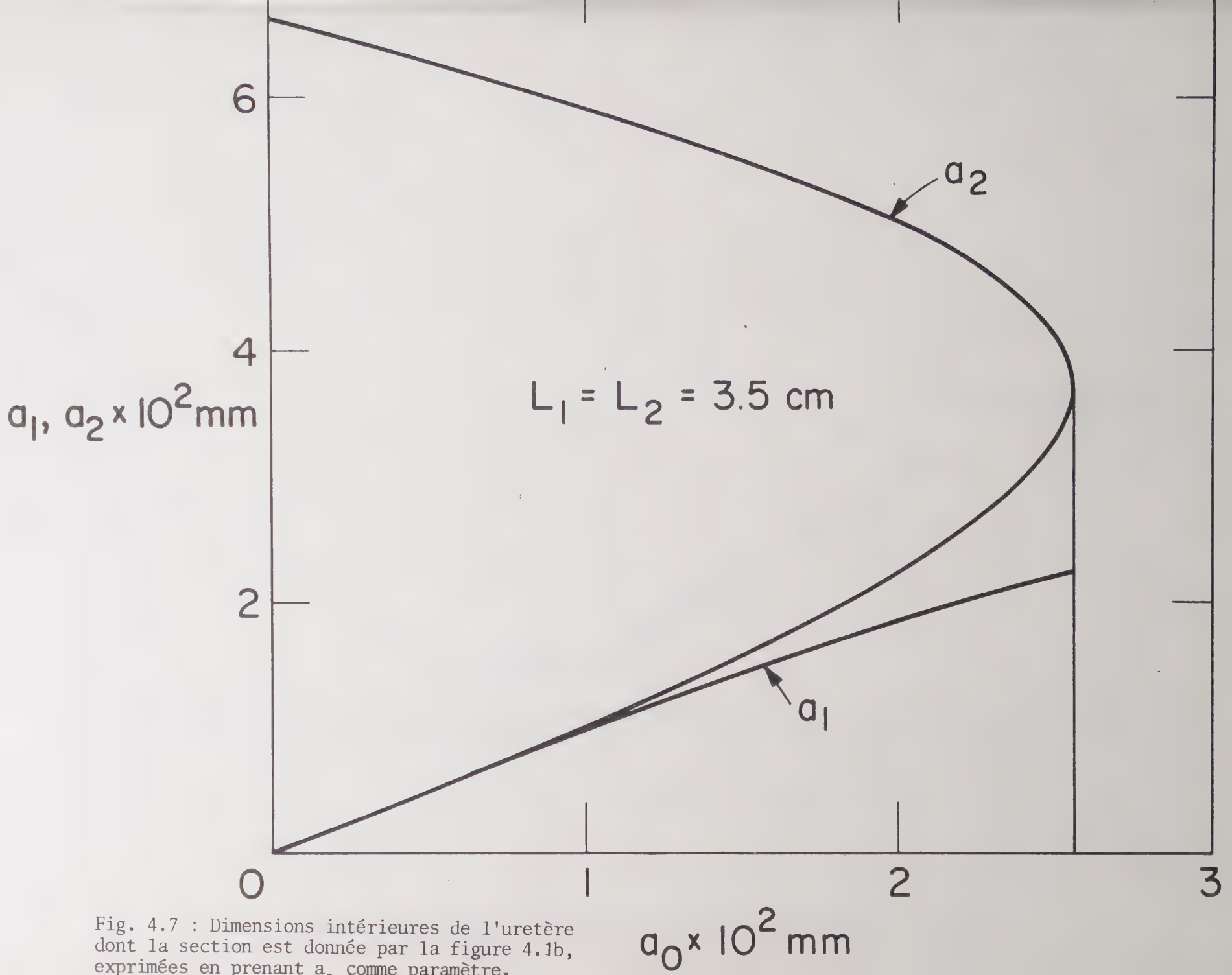


Fig. 4.7 : Dimensions intérieures de l'uretère dont la section est donnée par la figure 4.1b, exprimées en prenant a_0 comme paramètre.

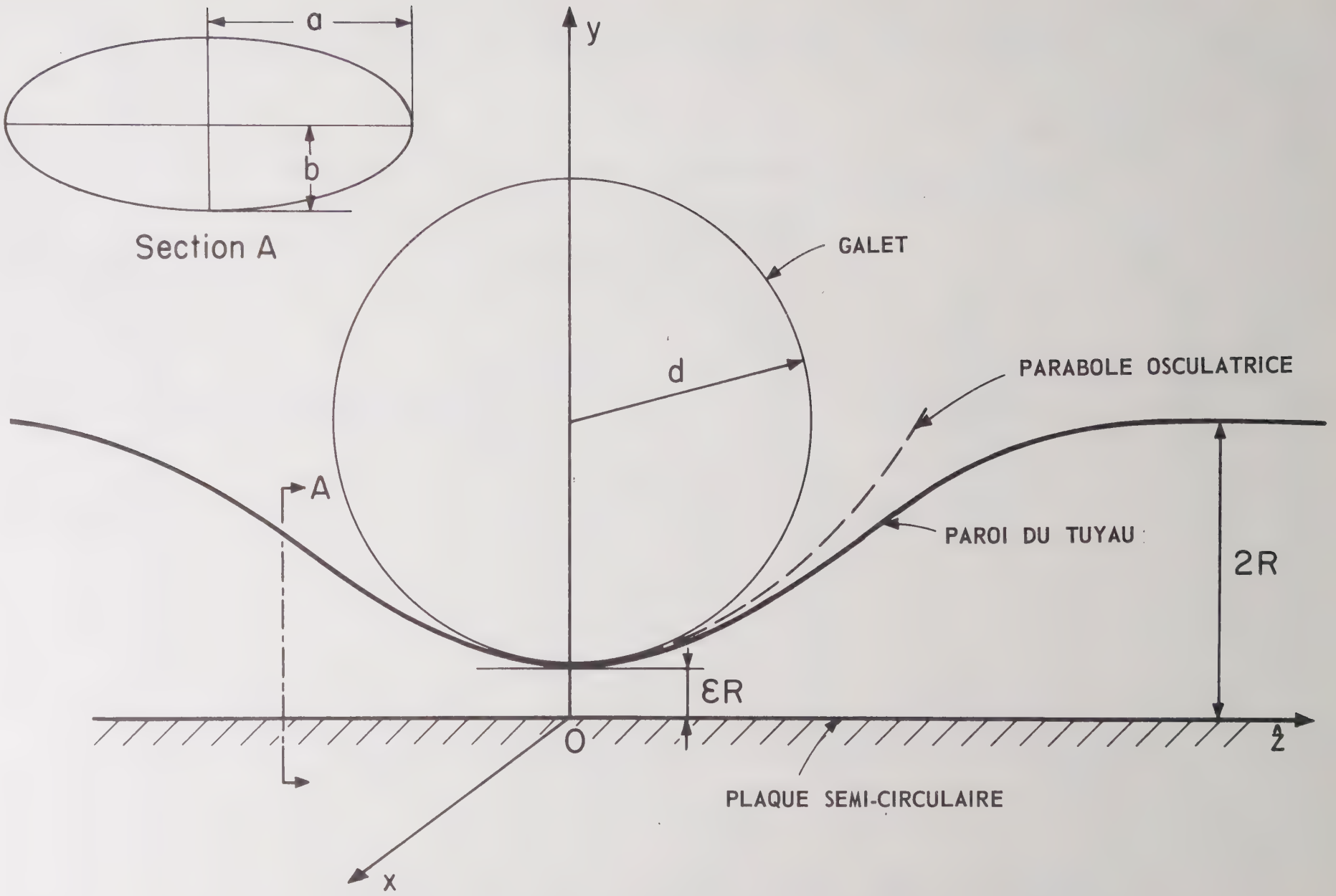


Fig. 5.1 : Nomenclature et schématisation du tuyau comprimé par le galet.

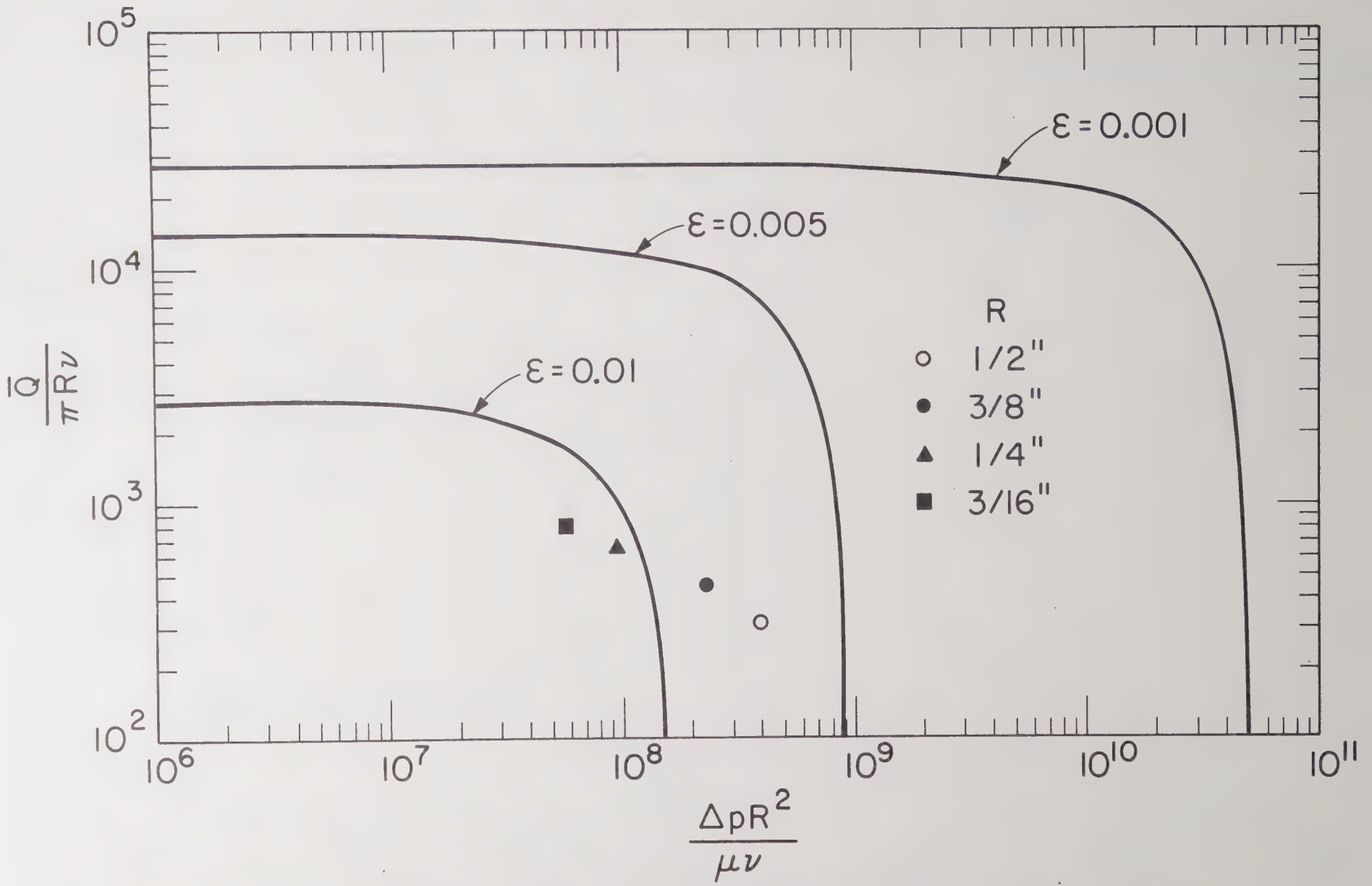


Fig. 5.2 : Domaine de validité de la solution aux faibles nombres de Reynolds en fonction du débit et de la charge pour D = 5, pour différentes valeurs de ε. Le rayon R est exprimé en pouces.

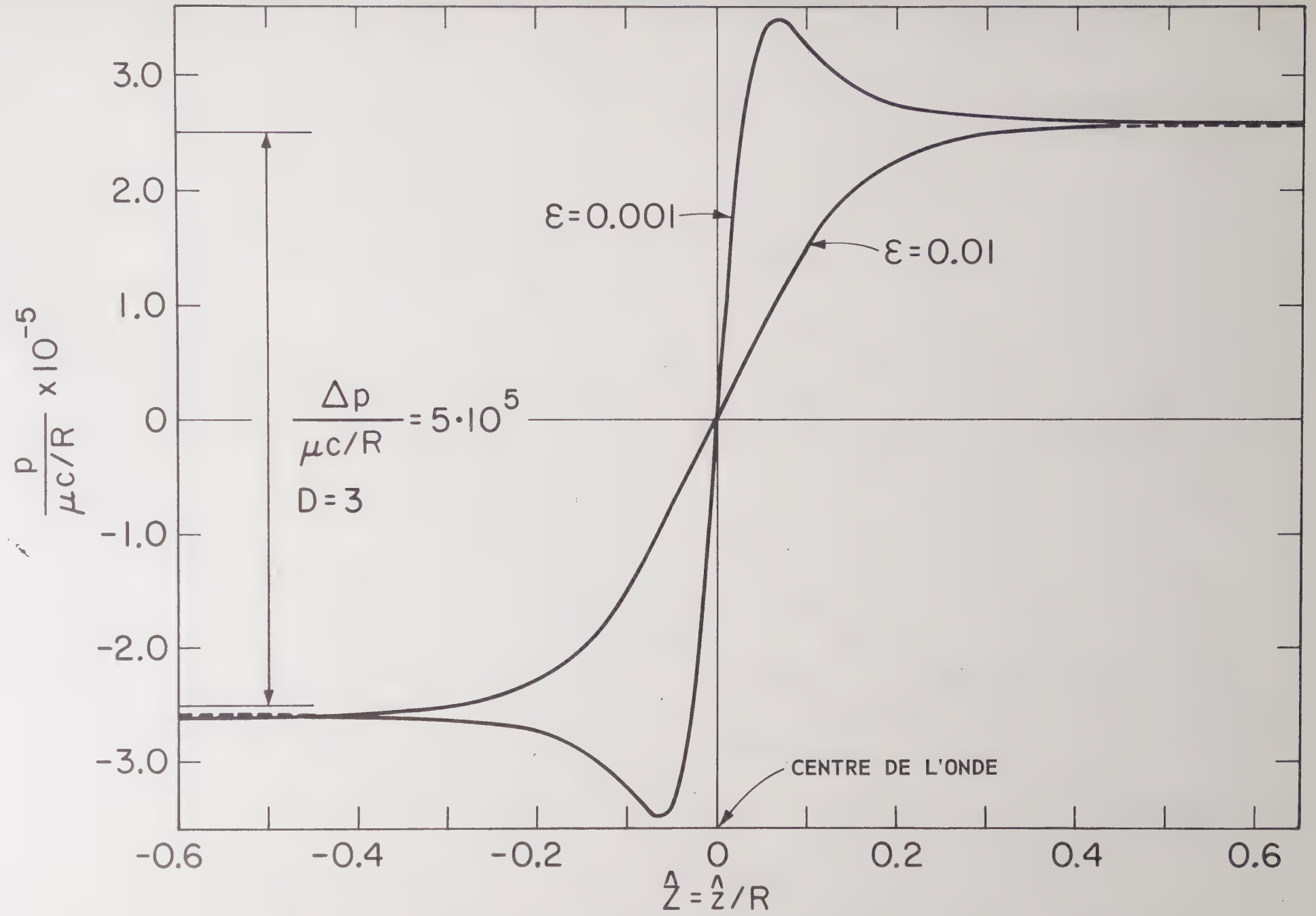


Fig. 5.3 : Distribution de pression dans la partie du fluide comprimée par le galet.

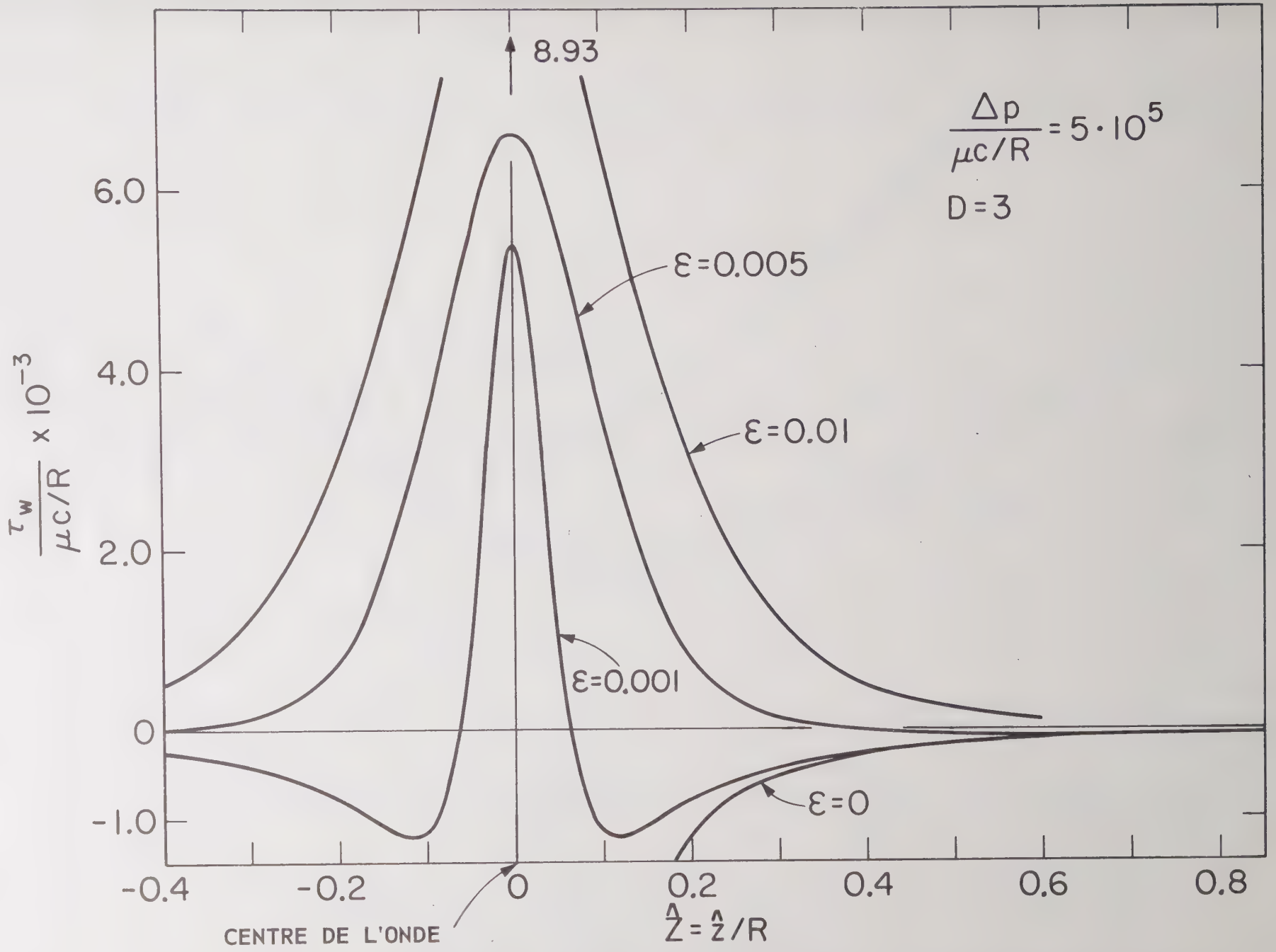


Fig. 5.4 : Distribution des contraintes à la paroi dans la partie comprimée par le galet.

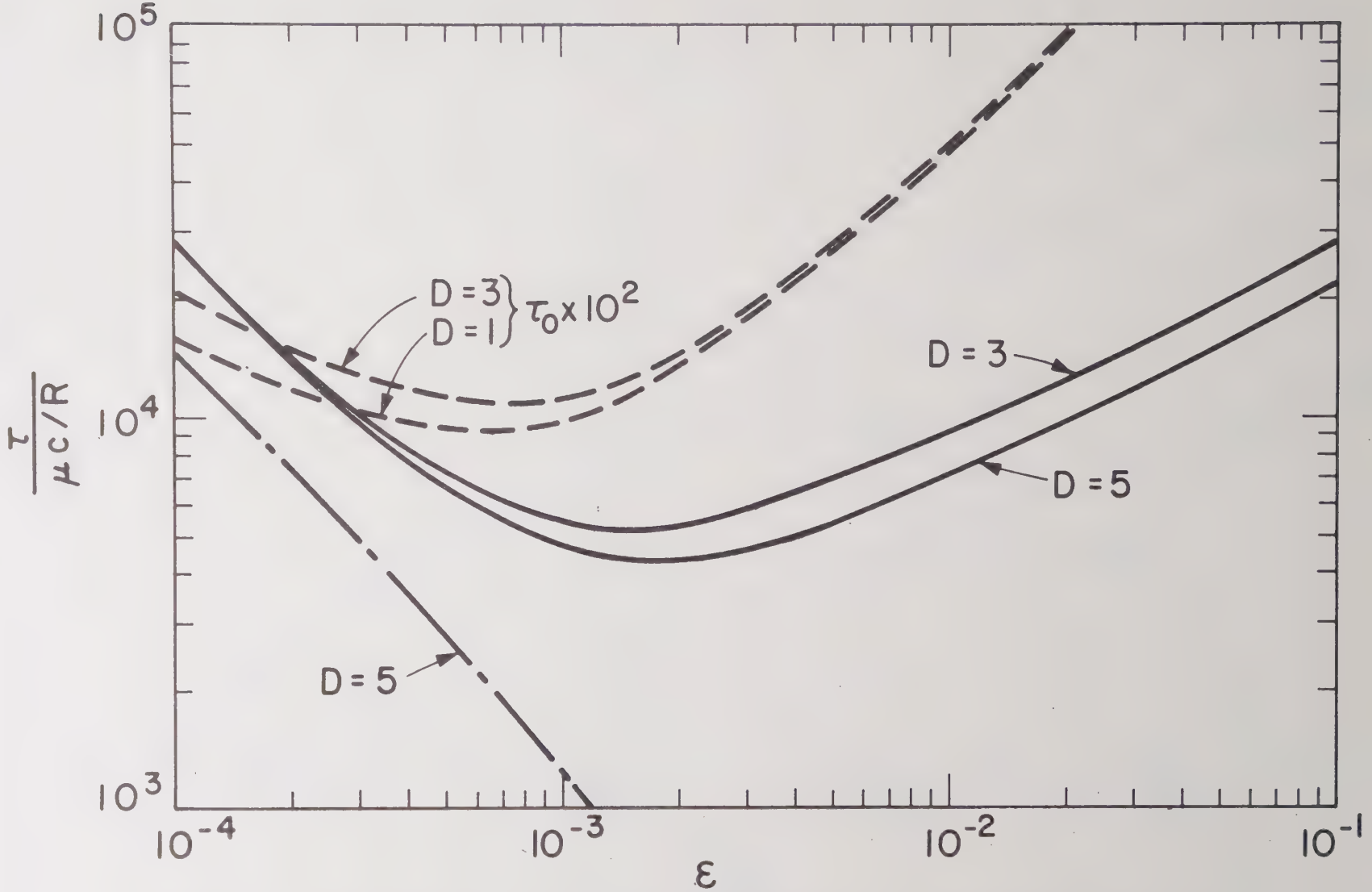


Fig. 5.5 : Variation des contraintes maximales avec ε pour différentes valeurs de D
——— Pompe à galet circulaire classique ;
------ Pompe avec compression répartie sur 5 cm ;
Extrémum négatif de la contrainte produite par un galet circulaire.

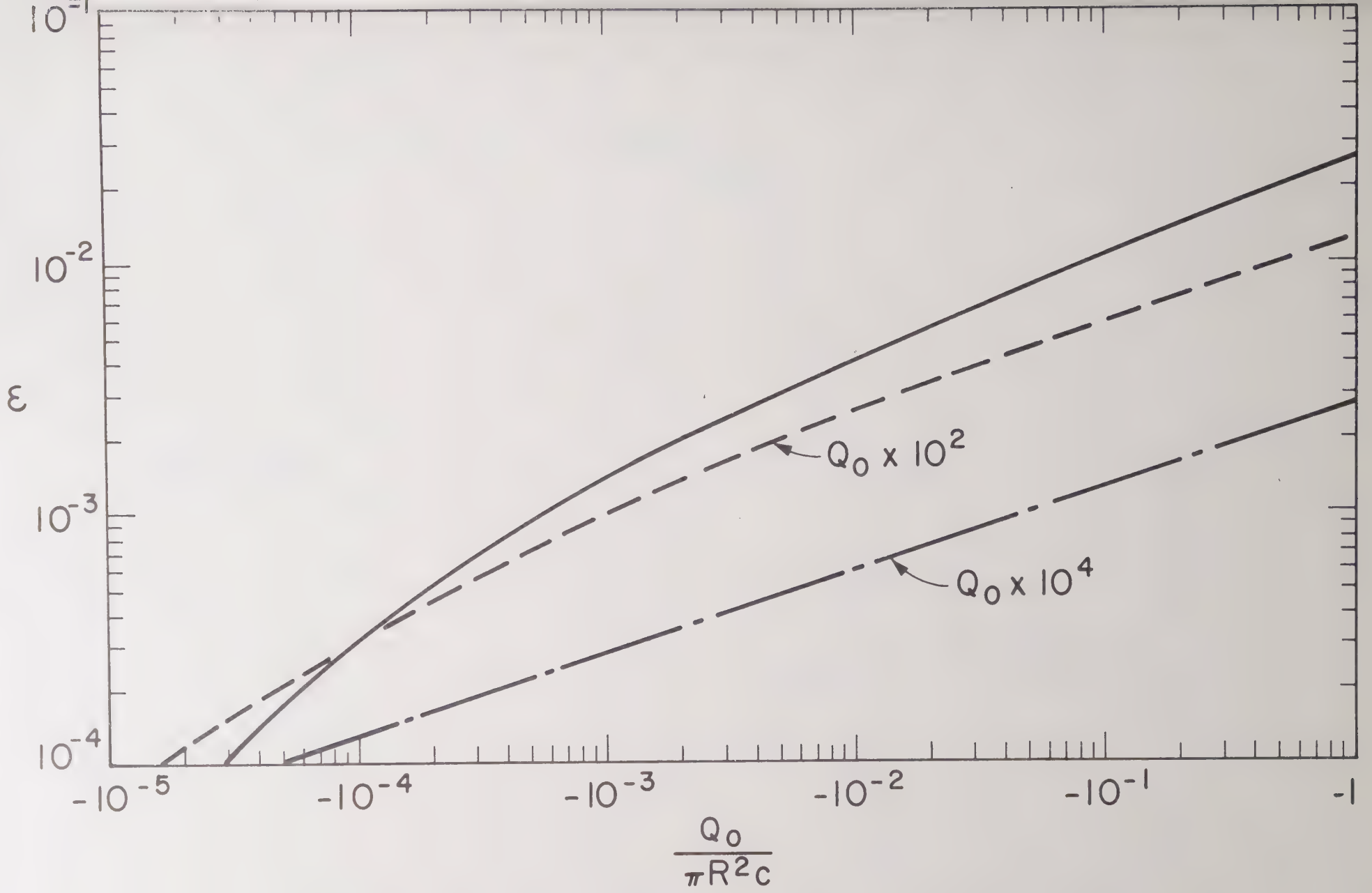


Fig. 5.6 : Variation du débit de fuite (à Z = 0)

——— Pompe à galet circulaire ;

------ Pompe avec compression répartie sur une distance s = 5 cm ;

–––– Compression répartie sur 5 cm en supposant que le tuyau reprend son diamètre normal sans transition.

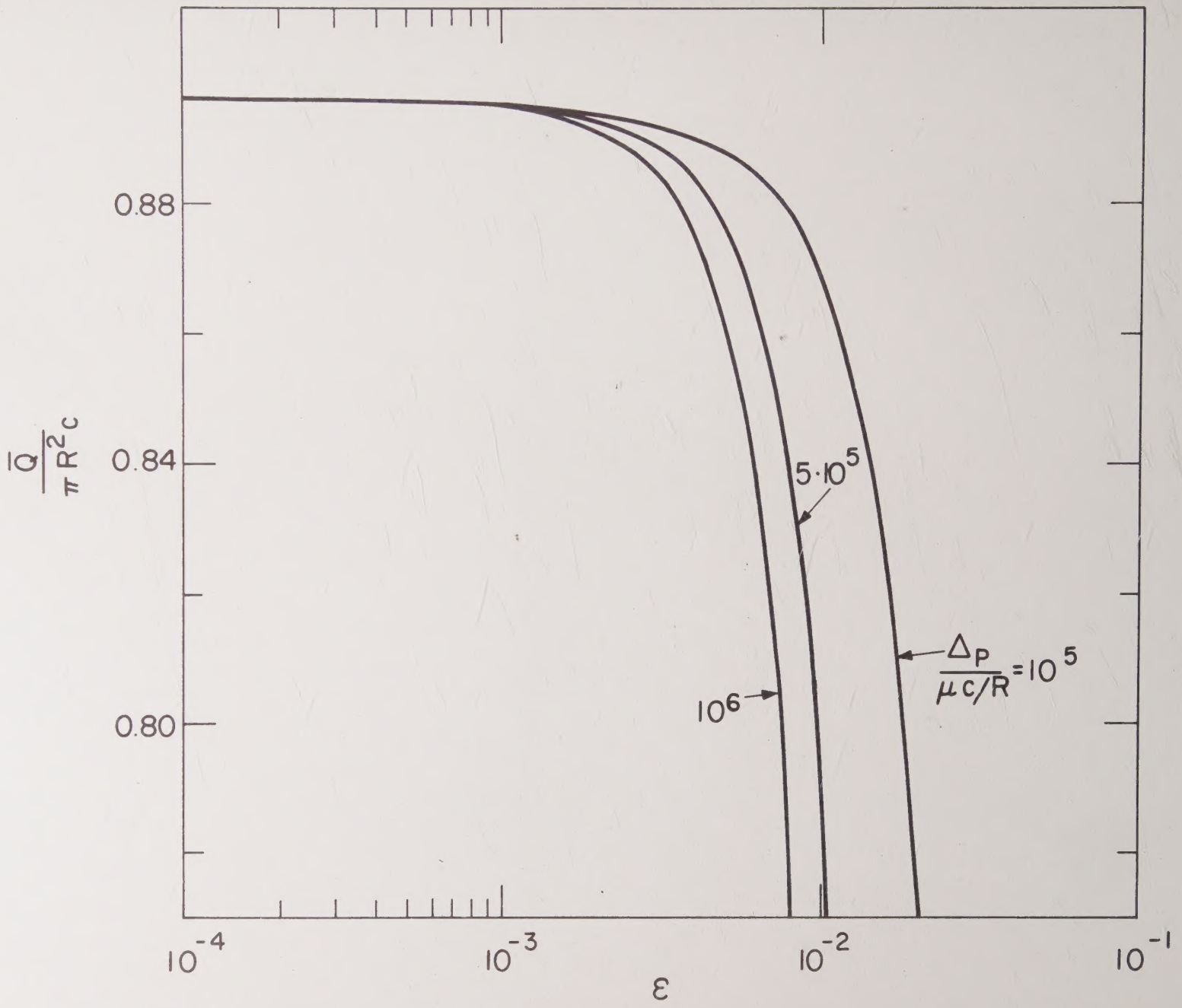


Fig. 5.7 : Débit d'une pompe à galet circulaire en fonction de l'occlusion et de la charge.